

Ασκήσεις Ι

3 Απριλίου 2025

Άσκηση 1. Κάθε χώρος με νόρμα «είναι» χώρος συναρτησεων:

Αν $(E, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, δείξτε ότι υπάρχει σύνολο Γ και γραμμική **ισομετρία** $\phi : E \rightarrow \ell_\Gamma^\infty$.

Άσκηση 2. Για τον $E = \ell_n^1(\mathbb{R})$ βρείτε καταλλήλη γραμμική ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \rightarrow \ell_\Gamma^\infty$. Επιλέξτε όσο πιο «μικρο» Γ μπορείτε.

Ίδια ερώτηση για τον $E = \ell_n^1(\mathbb{C})$. Συγκρίνετε τα σύνολα Γ στις δυο περιπτώσεις.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι κάθε $n \times n$ πίνακας $[a_{ij}]$ τελεστών $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ ορίζει φραγμένο (**Άσκηση**) τελεστή A στον H^n (όπου $H^n = H \oplus H \oplus \dots \oplus H$) μέσω πολλών/σμού πίνακων:

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}(\xi_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}(\xi_j) \end{bmatrix}.$$

Αντιστρόφως κάθε $A \in \mathcal{B}(H^n)$ επαγεί έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$ τελεστών $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ (**Άσκηση**).

Η απεικόνιση $M_n(\mathcal{B}(H)) \rightarrow \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \mapsto A$ που ορίσαμε είναι ισομορφισμός *-αλγεβρών (**Άσκηση**).

Άσκηση 4. Δείξτε ότι ο $(\ell_2^1, \|\cdot\|_1)$ με πράξεις και ενελίξη κατά συντεταγμένη είναι αλγεβρα Banach, αλλά δεν είναι C^* αλγεβρα.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι στην αλγεβρα $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ των χαρακτήρων είναι κeno: ισοδύναμα, δεν υπάρχουν γνησια μη μηδενικά αμφίπλευρα ιδεώδη.

Άσκηση 6. Στην C^* -αλγεβρα $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ θεωρούμε για κάθε $t \geq 0$ το στοιχείο $a_t := \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Να υπολογίσετε το φάσμα $\sigma(a_t)$, τη φασματική ακτίνα $\rho(a_t)$ και τη νόρμα $\|a_t\|$ του a_t .

Άσκηση 7. Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C^* -αλγεβρες και η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα 1_B , δείξτε ότι κάθε *-μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ επεκτείνεται μοναδικά σε *-μορφισμό $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ με $\phi_1((0, 1)) = 1_B$.

Άσκηση 8. Δείξτε ότι ο χώρος των χαρακτήρων της μεταθετικής C^* αλγεβρας $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής.

Άσκηση 9. (**Έχει γίνει**) Αν K και Λ είναι συμπαγείς T_2 χώροι και $\sigma : K \rightarrow \Lambda$ είναι συνεχής συνάρτηση, ναδειχθεί ότι

(α) Η απεικόνιση $\alpha : C(\Lambda) \rightarrow C(K) : f \mapsto f \circ \sigma$ είναι *-μορφισμός (διατηρεί αθροισμα, γινόμενο και μιγ. συζυγή) και είναι συνεχής, μάλιστα δεν μεγαλώνει τις νόρμες

(β) Η σ είναι επί αν-ν η α είναι 1-1, μάλιστα ισομετρία

(γ) Η σ είναι 1-1 αν-ν η α είναι επί.

Άσκηση 10. (Έχει γίνει) Δείξτε ότι αν μια μεταθετική C^* άλγεβρα A είναι (άλγεβρικά) $*$ -ισομορφική με την $C(K)$, για καποιον συμπαγή Hausdorff χώρο K , τότε ο K είναι ομοιομορφικός με τον χώρο των χαρακτήρων της A (με την ασθενή- $*$ τοπολογία).

Άσκηση 11. Δυο διαφορετικές (δηλ. μη ισομορφές) μεταθετικές άλγεβρες Banach με μονάδα μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο χαρακτήρων. Παραδειγμα: η $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ και η $(C(\mathbb{T}), \cdot)$ (εξηγήστε γιατί).

Αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν και οι δυο είναι μεταθετικές C^* -άλγεβρες (εξηγήστε γιατί).

Άσκηση 12. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα, $\mathcal{A}^\sim = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ η μοναδοποίηση της $\mathcal{A}$ και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}^\sim$. Δείξτε ότι το $f(a)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (ακριβέστερα, στην εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στην $\mathcal{A}^\sim$) αν-ν η συνάρτηση f μηδενίζεται στο $0 \in \sigma(a)$.

Άσκηση 13. (α) Δείξτε ότι ένας μιγαδικός $n \times n$ πίνακας T είναι θετικό στοιχείο στην C^* άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ αν-ν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα αν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $(T\xi, \xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.

(β) (Προαιρετικά) Στην C^* άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$, δείξτε ότι ένα στοιχείο T είναι θετικό αν-ν $(T\xi, \xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Άσκηση 14. Θεωρούμε την C^* άλγεβρα $C([0, 1])$. Αν μ είναι ένα κανονικό μέτρο Borel στον $[0, 1]$, ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathcal{B}(L^2([0, 1], \mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2([0, 1], \mu)$ και $(\mu$ -σχεδόν) κάθε $t \in [0, 1]$.

Δείξτε ότι η π_μ είναι πιστή (δηλ. 1-1) αναπαραστροφή της $C([0, 1])$ αν-ν ο φορέας του μέτρου είναι ολοκληρωτο $[0, 1]$, δηλαδή αν-ν $\mu(U) > 0$ για κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο $U \subseteq [0, 1]$.

Άσκηση 15. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ C^* άλγεβρα ώστε $I_H \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := (A\xi, \xi)$, $A \in \mathcal{A}$. Δείξτε ότι η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $A \rightarrow A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$.

Μαλιστα μπορεί να επιλεξω τον unitary ώστε $U\xi_\phi = \xi$.

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός 16. Το **ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert** $H := \bigoplus_{i \in I} H_i$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\xi = (\xi_i)$ με $\xi_i \in H_i$ για κάθε $i \in I$ και

$$\|\xi\|_H := \sup \left\{ \left(\sum_{i \in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\} < \infty.$$

Άσκηση 17. Να αποδείξετε τα ακόλουθα: Ο $(H, \|\cdot\|_H)$ είναι πλήρης χώρος. Κάθε $\xi \in H$ έχει αριθμήσιμο φορέα $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$(\xi, \eta)_H = \sum_{i \in J_\xi} (\xi_i, \eta_i)_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$. Το **άλγεβρικό ευθύ άθροισμα**

$$H_0 := \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του H .

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus_i H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \rightarrow H_0 : (x_i) \rightarrow (T_i x_i).$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\text{supp}(T_i x_i) \subseteq \text{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H .

Άσκηση 18. Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus_i H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. Μάλιστα

$$\left\| \bigoplus_i T_i \right\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}.$$

Άσκηση 19. Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα.

- (α) Αν η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.
- (β) Αν η $\mathcal{A}$ είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.