

## Άσκηση για την κατασκευή GNS

**Άσκηση 1.** Έστω  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$   $C^*$  άλγεβρα ώστε  $I_H \in \mathcal{A}$  και  $\xi \in H$  μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση  $\varphi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Δειξτε ότι η αναπαράσταση GNS  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$  είναι unitarily ισοδύναμη με την  $A \rightarrow A|_K$ ,  $A \in \mathcal{A}$  όπου  $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$ .  
Μαλιστα μπορώ να επιλεξω τον unitary ώστε  $U\xi_\varphi = \xi$ .

*Παρατηρησεις*

- Ο χώρος  $K$  είναι αναλλοίωτος από τη δράση της  $\mathcal{A}$ , γιατί για κάθε  $B \in \mathcal{A}$  έχουμε  $BA\xi \in K$  για κάθε  $A \in \mathcal{A}$  και συνεπώς, αφού  $K := \overline{\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$  (σωστά;) και ο  $B$  είναι φραγμένος,  $B(K) \subseteq K$ .

Συνεπώς, για κάθε  $A \in \mathcal{A}$  έχουμε  $A|_K : K \rightarrow K$ , δηλαδή  $A|_K \in \mathcal{B}(K)$ .

- Ορίζεται λοιπόν η απεικόνιση  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K) : A \mapsto A|_K$ . Είναι άμεσο ότι η  $\pi$  είναι μορφισμός αλγεβρών.

- Για κάθε  $A \in \mathcal{A}$ , ισχύει ότι  $\pi(A)^* = \pi(A^*)$ .

*Σχολιο.* Χρειάζεται αποδείξη, ότι ο συζυγής του περιορισμού είναι ο περιορισμός του συζυγούς; Ας σκεφτούμε την περίπτωση ο  $A$  να ήταν ο bilateral shift  $e_n \mapsto e_{n+1}$  στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$  και ο  $K$  να ήταν ο  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ ... Και μετά από 30" σκεψη, πάμε παρακάτω.

*Απόδειξη.* Έστω  $x \in K$ , να δείξουμε ότι  $\pi(A)^*x = \pi(A^*)x$ , δηλαδή ότι  $\pi(A)^*x = A^*x$ . Παρατηρούμε ότι, αφού  $A^* \in \mathcal{A}$  και  $x \in K$ , έχουμε  $A^*x \in K$  (δείτε τώρα ξανά το παραδειγμα!). Συνεπώς, για να δείξουμε ότι  $\pi(A)^*x - A^*x = 0$ , αρκεί να δείξουμε ότι  $\langle \pi(A)^*x - A^*x, y \rangle = 0$  για κάθε  $y \in K$ . Πράγματι, έχουμε

$$\langle \pi(A)^*x, y \rangle = \langle x, \pi(A)y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle A^*x, y \rangle$$

οπώς θέλαμε. □

- Κατά συνέπεια η  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K)$  είναι πραγματι  $*$ -αναπαράσταση της  $\mathcal{A}$ . Και από τον ορισμό του χώρου  $K$ , το  $\xi$  είναι κυκλικό διάνυσμα για την  $\pi$ .

- Έπεται τώρα από τον ορισμό  $\varphi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$  ( $A \in \mathcal{A}$ ) της  $\varphi$  ότι η τριάδα  $(\pi, K, \xi)$  είναι μια τριάδα GNS για την  $\varphi$ , όπως και η  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ . Από την μοναδικότητα της κατασκευής GNS (που έχουμε αποδείξει) προκύπτει ότι οι δύο αναπαράστασεις είναι unitarily ισοδύναμες, μέσω της απεικόνισης

$$U : \mathcal{H}_\varphi \rightarrow K$$

$$\text{που ικανοποιεί } \pi_\varphi(A)\xi_\varphi \mapsto \pi(A)\xi = A\xi$$

για κάθε  $A \in \mathcal{A}$ .

- Εκ των υστερών, μπως η εκφώνηση της Άσκησης επρέπε να είναι:

**Άσκηση 2.** Έστω  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$   $C^*$  άλγεβρα ώστε  $I_H \in \mathcal{A}$  και  $\xi \in H$  μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση  $\varphi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Δειξτε ότι η απεικόνιση  $A \rightarrow A|_K$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , όπου  $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$  είναι αναπαράσταση της  $\mathcal{A}$ , και ότι είναι unitarily ισοδύναμη με την GNS αναπαράσταση  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ .

Μαλιστα μπορώ να επιλεξω τον unitary ώστε  $U\xi_\varphi = \xi$ .