

Η συμπαγοποίηση Stone-Čech ενός διακριτού χώρου

Έστω Γ ¹ μη κενό σύνολο και

$$\mathcal{A} = \ell^\infty(\Gamma) = \{a : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, a \text{ φραγμένη}\}.$$

Είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα.

Συμβολίζουμε $\beta\Gamma$ τον χώρο των χαρακτήρων της \mathcal{A} : είναι συμπαγής χώρος Hausdorff στην ασθενή* τοπολογία.

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, ορίζουμε

$$\phi_\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : a \rightarrow a(\gamma).$$

Είναι προφανές ότι κάθε ϕ_γ είναι χαρακτήρας της \mathcal{A} .

(α) Η απεικόνιση

$$\Phi : \Gamma \rightarrow \beta\Gamma : \gamma \rightarrow \phi_\gamma$$

είναι 1-1. Πράγματι, αν $\phi_\gamma = \phi_{\gamma'}$ τότε θα έχουμε $a(\gamma) = a(\gamma')$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε θέτοντας $a = e_\gamma$ (=η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\{\gamma\}$), βρίσκουμε $1 = e_\gamma(\gamma')$ άρα $\gamma = \gamma'$.

(β) Το σύνολο $\Phi(\Gamma) = \{\phi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ είναι διακριτό στον $\beta\Gamma$.

Απόδειξη Θα δείξουμε κατι ισχυροτερο:² ότι κάθε σημείο ϕ_γ είναι μεμονωμένο στον $\beta\Gamma$, δηλ. ότι το μονοσύνολο $\{\phi_\gamma\}$ είναι ασθενώς* ανοικτό στο $\beta\Gamma$ (όλα τα μονοσύνολα είναι κλειστά, αφού ο $\beta\Gamma$ είναι Hausdorff).

Πράγματι: Αφού $e_\gamma \in \mathcal{A}$, από τον ορισμό της ασθενούς* τοπολογίας το σύνολο

$$V := \{\phi \in \beta\Gamma : |(\phi - \phi_\gamma)(e_\gamma)| < \frac{1}{2}\}$$

είναι ανοικτή περιοχή του ϕ_γ . Παρατήρησε πρώτα ότι για κάθε χαρακτήρα ϕ έχουμε $\phi(e_\gamma) = \phi(e_\gamma^2) = \phi(e_\gamma)^2$ και άρα $\phi(e_\gamma) \in \{0, 1\}$ ενώ $\phi_\gamma(e_\gamma) = 1$. Επομένως, αν $|(\phi - \phi_\gamma)(e_\gamma)| < \frac{1}{2}$ τότε $|\phi(e_\gamma) - 1| < \frac{1}{2}$ άρα $\phi(e_\gamma) = 1$.

Θα δείξουμε ότι το σύνολο V δεν περιεχει κανένα $\phi \in \beta\Gamma$ εκτος του ϕ_γ . Δηλαδή, αν $\phi \in V$ θα δείξω ότι $\phi(a) = \phi_\gamma(a) = a(\gamma)$ για καθε $a \in \mathcal{A}$.

Παρατηρούμε ότι για καθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $(ae_\gamma)(\gamma') = a(\gamma)$ όταν $\gamma' = \gamma$ και $(ae_\gamma)(\gamma') = 0$ αλλιως, δηλαδή $ae_\gamma = a(\gamma)e_\gamma$.

Συνεπώς $\phi(ae_\gamma) = a(\gamma)\phi(e_\gamma)$, άρα $\phi(a)\phi(e_\gamma) = a(\gamma)\phi(e_\gamma)$. Αφου $\phi(e_\gamma) = 1$, επεται ότι $\phi(a) = a(\gamma)$, όπως θελαμε.

¹betagam23, 9 Μαρτίου 2023

²Ευχαριστιες στον Μ. Ανουση.

(γ) Το σύνολο $\Phi(\Gamma) = \{\phi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ είναι πυκνό στον $\beta\Gamma$.

Απόδειξη Η κλειστή θήκη, έστω K , του $\Phi(\Gamma)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\beta\Gamma$. Επομένως, αν είναι γνήσιο υποσύνολο, υπάρχει μη μηδενική συνάρτηση $f \in C(\beta\Gamma)$ που μηδενίζεται στο K (Urysohn). Αλλά η \mathcal{A} είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα, επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand είναι επί της $C(\beta\Gamma)$: υπάρχει λοιπόν $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\hat{a} = f$. Τότε όμως για κάθε $\gamma \in \Gamma$ έχουμε $\hat{a}(\phi_\gamma) = f(\phi_\gamma) = 0$. Δηλαδή $a(\gamma) = \hat{a}(\phi_\gamma) = 0$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, οπότε $a = 0$, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\hat{a} = f \neq 0$. \square

(δ) Αν ταυτίσουμε (μέσω της Φ) το Γ με την εικόνα του στο $\beta\Gamma$, κάθε φραγμένη συνάρτηση $a : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ επεκτείνεται μοναδικά σε *συνεχή συνάρτηση* $\hat{a} : \beta\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$.³

Πράγματι, η συνάρτηση \hat{a} είναι επέκταση της a , γιατί $\hat{a}(\phi_\gamma) = a(\gamma)$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$ (ορισμός του ϕ_γ). Η επέκταση αυτή είναι μοναδική, γιατί αν μια συνεχής συνάρτηση $f : \beta\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ ταυτίζεται με την \hat{a} στο Γ , τότε αναγκαστικά θα ισούται με την \hat{a} σ' όλο το $\beta\Gamma$, εφόσον το Γ (δηλ. η εικόνα του) είναι πυκνό στο $\beta\Gamma$.

Παρατήρηση Αν το Γ είναι άπειρο (έστω και αριθμησιμο), ο χώρος $\beta\Gamma$ δεν είναι μετριοποιήσιμος. Μάλιστα, παρόλο που η εικόνα του Γ στο $\beta\Gamma$ είναι πυκνή, κανένα στοιχείο του $\beta\Gamma$ που δεν ανήκει στην εικόνα του Γ δεν προσεγγίζεται από ακολουθία στοιχείων της εικόνας του Γ .

Απόδειξη Αφού το Γ είναι άπειρο και διακριτό, δεν είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $\phi \in \beta\Gamma$ που δεν ανήκει στην εικόνα του Γ .

Έστω ότι αυτό το ϕ προσεγγίζεται στην τοπολογία του $\beta\Gamma$ από μια ακολουθία (ϕ_{γ_n}) όπου $\gamma_n \in \Gamma$ με $\gamma_n \neq \gamma_m$ όταν $n \neq m$. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Ονομάζουμε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου $E := \{\gamma_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma$. Δηλαδή, $a(\gamma_{2n}) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a(\gamma) = 0$ για κάθε $\gamma \in \Gamma \setminus E$.

Η συνάρτηση \hat{a} είναι συνεχής στο $\beta\Gamma$ και $\phi_{\gamma_n} \rightarrow \phi$, συνεπώς $\hat{a}(\phi_{\gamma_n}) \rightarrow \hat{a}(\phi)$. Επομένως $\lim_n \hat{a}(\phi_{\gamma_{2n}}) = \hat{a}(\phi)$, αλλά και $\lim_n \hat{a}(\phi_{\gamma_{2n-1}}) = \hat{a}(\phi)$. Όμως $\hat{a}(\phi_{\gamma_{2n}}) = a(\gamma_{2n}) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $\hat{a}(\phi_{\gamma_{2n-1}}) = a(\gamma_{2n-1}) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. \square

(Αν ο $\beta\Gamma$ ήταν μετριοποιήσιμος, κάθε $\phi \in \beta\Gamma$ θα προσεγγιζόταν από ακολουθία στοιχείων της εικόνας του Γ .)

³Στην τοπολογία, η συμπαγοποίηση Stone-Čech ορίζεται μέσω αυτής της ιδιότητας https://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Cech_compactification