Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται* **θετικό** *(γράφουμε $a \geqslant 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geqslant 0\}$, δηλαδη*

$$\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a = a^* \text{ και } \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+\}.$$

[1] *Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leqslant b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.*

Παρατηρηση Η συνθηκη $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ *δεν* συνεπαγεται παντα $a = a^*$:

Παραδειγμα το $a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ στην $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$.

Παραδείγματα 1. • *Στον $C(K)$: $f \geqslant 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).*

• *Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geqslant 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.*

• *Στην $\mathcal{B}(H)$ (H* μιγαδικος *χωρος Hilbert): $T \geqslant 0$ ανν $\langle T\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in H$.*

Πρόταση 2. *Σε κάθε C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ το σύνολο $\mathcal{A}_+$ είναι* κώνος*, δηλαδή:*

$$a, b \in \mathcal{A}_+,\ \lambda \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής. Για τον δεύτερο, θα χρειασθεί ένα λήμμα:

Λήμμα 3. *Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα, αν $x = x^*$ και $\|x\| \leqslant \mu$, τότε*

$$\begin{aligned} -\mu\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \mu\mathbf{1} \\ \text{και} \quad x \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - \mu\mathbf{1}\| \leqslant \mu\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Αφού $x = x^*$, έχουμε $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης αν $\lambda \in \sigma(a)$ έχουμε $|\lambda| \leqslant \|x\| \leqslant \mu$. Συνεπώς $\sigma(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|] \subseteq [-\mu, \mu]$. Επομένως, $\sigma(x + \mu\mathbf{1}) \subseteq [0, 2\mu]$, άρα $x + \mu\mathbf{1} \geqslant 0$ και ομοίως $\mu\mathbf{1} - x \geqslant 0$. Άρα $-\mu\mathbf{1} \leqslant x$ και $x \leqslant \mu\mathbf{1}$.

Επίσης, επειδή η φασματική ακτίνα ενός φυσιολογικού στοιχείου είναι ίση με τη νόρμα του, έχουμε

$$\|x - \mu\mathbf{1}\| = \rho(x - \mu\mathbf{1}) = \sup\{|\mu - \lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \sup\{(\mu - \lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$$

το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο από μ αν και μόνον αν $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. □

Εναλλακτικη Αποδειξη Η C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, x)$ που παραγεται απο το αυτοσυζυγες x και την μοναδα ειναι μεταθετικη C* άλγεβρα με μοναδα, επομενως ειναι *-ισομορφικη με την $C(K)$ για καποιον συμπαγη Hausdorff χωρο K (μαλιστα ξερουμε οτι προκειται για τον $\sigma(x)$). Μεσω του ισομορφισμου αυτου, που διατηρει τη νορμα και το φασμα, αρα και την θετικοτητα, το x αντιστοιχει σε μια συνεχη συναρτηση στο K (μαλιστα ξερουμε οτι προκειται για την $\hat{x}$) η οποια παιρνει πραγματικες τιμες αφου ειναι αυτοσυζυγης. Συνεπως η σχεση $\|x\| \leqslant \mu$, που ισοδυναμει με την $\|\hat{x}\|_\infty \leqslant \mu$, δινει $|x(t)| \leqslant \mu$ δηλαδη $-\mu \leqslant x(t) \leqslant \mu$ για καθε $t \in K$ δηλαδη $-\mu\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \mu\mathbf{1}$.

[1] Υπενθυμιζουμε ότι, αν η $\mathcal{A}$ δεν εχει μοναδα, το φασμα $\sigma(a)$ οριζεται στην μοναδοποιηση $\widetilde{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$.

Επισης, η σχεση $\|x-\mu\mathbf{1}\| \leqslant \mu$ ισοδυναμει με την $\|\hat{x}-\mu\mathbf{1}\|_\infty \leqslant \mu$, δηλαδη $-\mu \leqslant \hat{x}(t)-\mu \leqslant \mu$ για καθε $t \in K$ αληθευει αν και μονον αν $0 \leqslant \hat{x}(t) \leqslant 2\mu$ για καθε $t \in K$ δηλαδη $0 \leqslant x \leqslant 2\mu\mathbf{1}$, που ισοδυναμει με την $0 \leqslant x$ (αφου $x \leqslant \mu\mathbf{1}$ απο το πρωτο σκελος).

Απόδειξη της Πρότασης 2. Είναι φανερό ότι αν $a \geqslant 0$ και $\lambda \geqslant 0$ τότε $\lambda a \geqslant 0$.

Τώρα, για να δείξουμε ότι το άθροισμα δυο θετικών στοιχείων είναι θετικό θεωρουμε πρωτα δυο θετικά στοιχεία a' και b' νόρμας το πολύ 1. Από το Λήμμα έχουμε ότι $\|a'-\mathbf{1}\| \leqslant 1$ και $\|b'-\mathbf{1}\| \leqslant 1$, οπότε

$$\left\|\mathbf{1}-\frac{a'+b'}{2}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(\mathbf{1}-a')+(\mathbf{1}-b')\right\| \leqslant \frac{1}{2}(\left\|\mathbf{1}-a'\right\|+\left\|\mathbf{1}-b'\right\|) \leqslant 1\,,$$

συνεπώς, αφού το $\frac{a'+b'}{2}$ είναι αυτοσυζυγές με νόρμα το πολύ 1, πάλι από το Λήμμα προκύπτει ότι $\frac{a'+b'}{2} \geqslant 0$. Στη γενικη περιπτωση δυο θετικων στοιχειων a και b, θετουμε $\mu = \max\{\|a\|, \|b\|\}$ και $a' = \frac{a}{\mu}$, $b' = \frac{a}{\mu}$ οποτε απο την προηγουμενη παραγραφο εχουμε $\frac{a'+b'}{2} \geqslant 0$ οποτε $a+b = 2\mu\frac{a'+b'}{2} \geqslant 0$. □

Πρόταση 4. *Ο κώνος $\mathcal{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.*

Απόδειξη. (α) Από το Λήμμα έχουμε ότι

$$\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a = a^* \text{ και } \|a - \|a\|\,\mathbf{1}\| \leqslant \|a\|\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι κλειστό, από τη συνέχεια της ενέλιξης και της νόρμας.

(β) Αν $a \in \mathcal{A}_+$ και $-a \in \mathcal{A}_+$, τότε $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ και $\sigma(-a) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή $\sigma(a) \subseteq \{0\}$. Τότε όμως, αφού $a = a^*$, έχουμε $\|a\| = \rho(a) = 0$, άρα $a = 0$. □

Ο επόμενος στόχος είναι να δείξουμε ότι ένα στοιχείο μιας C* άλγεβρας είναι θετικό αν και μόνον αν έχει τετραγωνική ρίζα. Η μια κατεύθυνση προκύπτει από το συναρτησιακό λογισμό:

Πρόταση 5. *Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει θετική τετραγωνική ρίζα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$,*

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathcal{A}_+ \text{ ώστε } \; a = b^2.$$

Απόδειξη. Αν $a = b^2$ όπου $b \in \mathcal{A}_+$, τότε $a = a^*$ και $\sigma(a) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(b)\}$ από το Θεωρημα φασματικής απεικόνισης. Επομένως, αφού $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$ έχουμε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ και συνεπώς $a \geqslant 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $a \geqslant 0$. Τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ οπότε η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(a)$. Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό λογισμό (αφού $a = a^*$) έχουμε ένα στοιχείο $b := f(a) = \omega_c(f)$ της $\mathcal{A}$ το οποίο είναι θετικό αφού $f(t) \geqslant 0$ για κάθε $t \in \sigma(a)$ (εξηγειστε τις λεπτομερειες). Πάλι απ' τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε $b^2 = (\omega_c(f))^2 = \omega_c(f^2) = a$. □

Παρατήρηση 6. *Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ ανήκει στην C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$.*

Απόδειξη. Αν $f(t) = \sqrt{t}$, η f ειναι οριο πολυωνυμων (ομοιομορφα στο $\sigma(a)$), αρα η $\sqrt{a} = f(a)$ ειναι οριο πολυωνυμων του a, συνεπως ανηκει στην $C^*(\mathbf{1}, a)$. □

Παρατήρηση 7. *Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ είναι μοναδική. Δηλαδή, αν $c \in \mathcal{A}_+$ και $c^2 = a$, τότε $c = f(a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ για κάθε $t \in \sigma(a)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το c μετατίθεται με το a (αφού $a = c^2$). Συνεπώς μετατίθεται και με κάθε πολυώνυμο του a, άρα και με το $b := f(a)$, που είναι όριο πολυωνύμων του a.

Έπεται ότι η C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, b, c)$ που παράγεται από τα θετικά στοιχεία $\mathbf{1}, b, c$ είναι μεταθετική. Κατά συνέπεια είναι ισομετρικά *-ισομορφική με μια C* άλγεβρα της μορφής $C(K)$. Τα b και c αντιστοιχούν σε μη αρνητικές συναρτήσεις f και g στο K, οι οποίες αναγκαστικά θα είναι ίσες, αφού $f^2 = g^2$ (γιατί $b^2 = a = c^2$). [2] Άρα $b = c$. $\square$

Πρόταση 8. *Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ (με μονάδα) γράφεται ως διαφορά $a = a_+ - a_-$ δυο θετικών στοιχείων $a_+, a_- \in \mathcal{A}$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(\mathbf{1}, a)$) ώστε $a_+a_- = a_-a_+ = 0$.*

Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f_+(t) = \begin{cases} t & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
Θέτουμε $a_+ = f_+(a)$ και $a_- = a_+ - a = f_-(a)$ όπου $f_-(t) = f_+(t) - t$. Επειδή $f_\pm \geqslant 0$, τα a_+, a_- είναι θετικά στοιχεία, και επειδή $f_+f_- = 0$ έχουμε $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. $\square$

Θεώρημα 9. *Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$, κάθε στοιχείο της μορφής a^*a είναι θετικό.*

Απόδειξη. Βεβαίως το a^*a είναι αυτοσυζυγές. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a^*a = b - c \quad \text{όπου } b, c \geqslant 0,\ bc = 0\,.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $c = 0$.

Έστω $x = ca^*$. Παρατηρούμε ότι

$$xx^* = ca^*ac = c(b - c)c = -c^3.$$

Επομένως, αφού $\sigma(c) \subseteq \mathbb{R}_+$, έχουμε $\sigma(-x^*x) = \sigma(c^3) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή

$$-xx^* \in \mathcal{A}_+.$$

Όμως, αν γράψουμε $x = u + iv$ όπου τα $u, v \in \mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγή, βρίσκουμε οτι το

$$xx^* + x^*x = 2u^2 + 2v^2$$

ανήκει στον $\mathcal{A}_+$ (αφού είναι κώνος και $u^2, v^2 \in \mathcal{A}_+$). Πάλι χρησιμοποιώντας ότι ο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος, συμπεραίνουμε ότι

$$x^*x = -xx^* + (xx^* + x^*x) \in \mathcal{A}_+.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sigma(x^*x) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \sigma(xx^*) \subseteq \mathbb{R}_-.$$

Όμως, σε κάθε άλγεβρα με μονάδα έχουμε $\sigma(kh) \subseteq \sigma(hk) \cup \{0\}$. [3]

Έπεται λοιπόν ότι $\sigma(xx^*) \subseteq \{0\}$, άρα $\sigma(xx^*) = \{0\}$ (αφου δεν ειναι κενο). Κατά συνέπεια $\|xx^*\| = 0$ (αφού το xx^* είναι αυτοσυζυγές) οπότε $-c^3 = xx^* = 0$, άρα $\{0\} = \sigma(c^3) = \{\lambda^3 : \lambda \in \sigma(c)\}$ και άρα $\sigma(c) = \{0\}$ οποτε $c = 0$ αφού είναι αυτοσυζυγές. $\square$

[2] Για καθε $x \in K$, αν $f(x) + g(x) = 0$, τοτε $f(x) = g(x) = 0$, αρα $f(x) = g(x)$. Αν παλι $f(x) + g(x) > 0$, τοτε, αφου $(f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) = f^2(x) - g^2(x) = 0$, παλι εχουμε $f(x) - g(x) = 0$.

[3] Πράγματι, αν $\lambda \notin \sigma(hk)$ και $\lambda \neq 0$, το στοιχείο $y = \lambda^{-1}\mathbf{1} + \lambda^{-1}k(\lambda\mathbf{1} - hk)^{-1}h$ ικανοποιεί $y(\lambda\mathbf{1} - kh) = (\lambda\mathbf{1} - kh)y = \mathbf{1}$, άρα $\lambda \notin \sigma(kh)$.