

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω ¹ $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα, όχι κατ' αναγκη μεταθετική (πχ. $\mathcal{A} = B(H)$).

Σταθεροποιούμε ένα $a \in \mathcal{A}$.

Αν p είναι ένα πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(a) = \sum_{k=0}^n c_k a^k$ (όπου $a^0 = \mathbf{1}$).

Στόχος: να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \mapsto p(a)$ σε ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων.

Παρατήρηση. Η απεικόνιση $\omega_a^\pi : p \mapsto p(a)$ διατηρεί το άθροισμα $+$ και το γινόμενο $\cdot$.

Η C^* άλγεβρα που παραγεται απο ενα στοιχειο Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Συμβολίζουμε $C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι η C^* -υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$. Προκειται για την μικροτερη C^* -υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιεχει το a και την $\mathbf{1}$, δηλαδή είναι η τομή όλων των C^* -υπαλγεβρων της $\mathcal{A}$ που περιεχουν το a και την $\mathbf{1}$.

Παρατήρηση 1. Η $C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι μεταθετική αν και μονο αν το a είναι φυσιολογικο, δηλ. $a^*a = aa^*$. Τότε

$$C^*(\mathbf{1}, a) = \overline{\text{span}\{a^n a^{*m} : n, m \in \mathbb{Z}_+\}} = \overline{\{p(a, a^*) : p \text{ πολωνυμο δυο μεταβλητων}\}}$$

(δηλ. $p(s, t) = \sum_{n,m=0}^N \lambda_{n,m} s^n t^m$, $\lambda_{n,m} \in \mathbb{C}$).

Η αποδειξη είναι απλη εφαρμογη των ορισμων:

Αν η $C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι μεταθετική, τότε βεβαιως τα a και a^* μετατιθενται, δηλαδή το a είναι φυσιολογικο.

Αν αντιστροφα τα a και a^* μετατιθενται, τότε μετατιθενται και οι δυναμεις τους, a^n και a^{*m} για $n, m \in \mathbb{Z}_+$, οποτε η γραμμικη θηκη των γινομενων $\{a^n a^{*m} : n, m \in \mathbb{Z}_+\}$, που δεν είναι αλλη απο το συνολο των πολωνυμων ως προς a και a^* , είναι αλγεβρα, μαλιστα μεταθετική, αυτοσυζυγης, και βεβαιως περιεχει τα a και a^* . Επομενως η κλειστη της θηκη είναι μεταθετική C^* άλγεβρα, περιεχει τα a και a^* , και προφανως περιεχεται σε καθε C^* -υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιεχει το a και την $\mathbf{1}$. Είναι δηλαδή η $C^*(\mathbf{1}, a)$. $\square$

Παράδειγμα 2. Εστω $K \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγες και $\mathcal{A} = C(K)$. Τότε η μοναδιαια C^* -υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παραγεται απ το στοιχειο $f_0(t) = t$ ($t \in K$) είναι η ιδια η $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η $C^*(\mathbf{1}, f_0) \subseteq C(K)$ είναι η αλγεβρα των πολωνυμικων συναρτησεων $p : K \rightarrow \mathbb{C}$. Συνεπως απο το Θεωρημα Weierstrass (!)² καθε καθε συνεχης συναρτηση στο K προσεγγιζεται, ομοιομορφα στο K , απο πολωνυμα $\square$

Παράδειγμα 3. Εστω $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγες και $\mathcal{A} = C(K)$. Τότε η μοναδιαια C^* -υπαλγεβρα της $\mathcal{A}$ που παραγεται απ το στοιχειο $f_0(z) = z$ ($z \in K$) είναι η ιδια η $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η $C^*(\mathbf{1}, f_0) \subseteq C(K)$ είναι αλγεβρα, περιεχει το συζυγες καθε στοιχειου της (είναι $*$ -αλγεβρα), περιεχει τις σταθερες συναρτησεις (αφου περιεχει την $\mathbf{1}$) και χωριζει τα σημεια του K , μαλιστα η συναρτηση f_0 απο μονη της τα χωριζει: αν $z \neq w$, τότε $f_0(z) \neq f_0(w)$.

Δηλαδή η $C^*(\mathbf{1}, f_0)$ ικανοποιει τις υποθεσεις του Θεωρηματος Stone - Weierstrass (!). Συνεπως είναι πυκνη στην $C(K)$. Αφου ομως είναι κλειστη εξ υποθεσεως, ισουται με την $C(K)$. $\square$

¹funcal25met. Ευχαριστιες στον Δ.Ε. για την προσεγγιση στην αποδειξη του Θεωρηματος.

²Το K περιεχεται σε καποιο συμπαγες διαστημα $[a, b]$, και καθε συνεχης συναρτηση στο K επεκτεινεται (με την ιδια νορμα) σε συνεχη συναρτηση ορισμενη στο $[a, b]$, η οποια προσεγγιζεται, ομοιομορφα στο $[a, b]$, απο πολωνυμα.

Θεώρημα 4 (Συναρτησιακός λογισμός). Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Υπάρχει $*$ -μορφισμός

$$\omega_a^c : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$$

με $\omega_a^c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\omega_a^c(\text{id}) = a$ αν και μόνον αν $a^*a = aa^*$. Η απεικόνιση ω_a^c (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το πεδίο τιμών της είναι ακριβώς η C^* -υπόαλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$.

Συμβολισμός: Αν $f \in C(\sigma(a))$, γράφουμε συνήθως $f(a)$ αντί για $\omega_a^c(f)$.

Ορισμός 1. Έστω $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Η απεικόνιση

$$\omega_a^c : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A} : f \mapsto f(a)$$

ονομάζεται συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus).

Αποδειξη του Θεωρήματος (α) Η συνθήκη $a^*a = aa^*$ είναι αναγκαία για την ύπαρξη του ω_a^c . Πράγματι, αν $f_o : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση $f_o(z) = \text{id}(z) = z$, τότε $\omega_a^c(f_o) = a$ από την υπόθεση. Επομένως $a^* = (\omega_a^c(f_o))^* = \omega_a^c(f_o^*)$ αφού η ω_a^c είναι $*$ -μορφισμός. Αλλά οι συναρτήσεις f_o και f_o^* μετατίθενται, συνεπώς και οι εικόνες τους a και a^* πρέπει να μετατίθενται.

(β) Υπαρξη Υποθέτουμε τώρα ότι η συνθήκη $a^*a = aa^*$ ικανοποιείται. Τότε, όπως είδαμε, η $\mathcal{C} := C^*(\mathbf{1}, a)$ είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα, συνεπώς είναι ισομορφή, ως C^* άλγεβρα, με μια άλγεβρα της μορφής $C(K)$,³ μέσω του μετασχηματισμού Gelfand

$$\mathcal{G} : x \mapsto \hat{x} : \mathcal{C} \rightarrow C(K).$$

Δηλαδή η εικόνα $\hat{a}$ του a είναι μια συνεχής συνάρτηση στο K , και $\sigma(\hat{a}) = \sigma(a)$.⁴ Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$C(\sigma(a)) \rightarrow C(K) : f \mapsto f \circ \hat{a}.$$

είναι $*$ -μορφισμός. Εφόσον ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{C} \rightarrow C(K)$ είναι 1-1 και επί, υπάρχει μοναδικό $b \in \mathcal{C}$ ώστε $\hat{b} = f \circ \hat{a}$. Αυτό το b ονομάζουμε $f(a)$, και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$\omega_a^c : C(\sigma(a)) \rightarrow C(K) \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} : f \mapsto f \circ \hat{a} \mapsto f(a)$$

είναι ισομετρικός $*$ -μορφισμός της $C(\sigma(a))$ επί την $\mathcal{C}$, ως σύνθεση ισομετρικών $*$ -μορφισμών.

Μένει να ελεγχθεί ότι η ω_a^c επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα. Αρκεί γι' αυτό να ελέγξουμε ότι $\omega_a^c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και ότι $\omega_a^c(f_o) = a$. Πραγματι, από τον ορισμό της ω_a^c έχουμε

$$\mathbf{1} \mapsto \mathbf{1} \circ \hat{a} = \mathbf{1} \mapsto \mathbf{1} \quad \text{και} \quad f_o \mapsto f_o \circ \hat{a} = \hat{a} \mapsto a.$$

(γ) (Μοναδικότητα) Έστω $\Phi : C(\sigma(a)) \rightarrow \mathcal{A}$ $*$ -μορφισμός με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\Phi(f_o) = a$. Επειδή οι $C(\sigma(a))$ και $\mathcal{A}$ είναι C^* άλγεβρες με μονάδα, και ο Φ είναι $*$ -μορφισμός, έπεται (όπως έχουμε δείξει) ότι ο Φ είναι συνεχής. Έχουμε όμως, για κάθε $n, m = 0, 1, \dots$,

$$\Phi(f_o^n f_o^{*m}) = \Phi(f_o)^n \Phi(f_o)^{*m} = a^n a^{*m} = \omega_a^c(f_o)^n \omega_a^c(f_o)^{*m} = \omega_a^c(f_o^n f_o^{*m}).$$

³μαλιστα $K \simeq \mathcal{M}(\mathcal{C})$

⁴Όπως έχουμε δείξει, για κάθε $y \in \mathcal{C}$ έχουμε $\sigma_{\mathcal{C}}(y) = \sigma_{\mathcal{A}}(y)$ οπότε γράφουμε απλώς $\sigma(y)$.

Επομένως οι Φ και ω_a^c ταυτίζονται στην γραμμική θήκη του συνόλου $\{f_o^n f_o^{*m} : n, m = 0, 1, \dots\}$. Αφου είναι συνεχείς, ταυτίζονται και στην κλειστή γραμμική θήκη αυτου του συνολου, δηλαδη στην μοναδιαια C^* αλγεβρα που παραγεται απο την f_o . Ομως, οπως ειδαμε στο Παραδειγμα 3, η αλγεβρα αυτη ειναι η $C(\sigma(a))$. $\square$

Πόρισμα 5. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Το σύνολο

$$\{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a και συμβολίζεται $C^*(1, a)$. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολωνύμων των a και a^* .

Απόδειξη. Το σύνολο $\{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$ είναι ακριβώς η εικόνα, μέσω του συναρτησιακού λογισμού ω_a^c , της μεταθετικής C^* αλγεβρας $C(\sigma(a))$. Οπως δείξαμε στο θεωρημα, η αλγεβρα αυτη ειναι η $C^*(1, a)$, η οποια περιγραφεται στην Παρατηρηση 1. $\square$

Αν $f \in C(\sigma(a))$ και (p_n) μια οποιαδήποτε ακολουθια πολωνυμων ως προς z και $\bar{z}$ που προσεγγιζει την f ομοιομορφα στο συμπαγες $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$, τότε $\|f(a) - p_n(a, a^*)\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$.

Θεώρημα 6 (φασματικής απεικόνισης). Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* -άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό και $f \in C(\sigma(a))$ τότε

$$\begin{aligned} \sigma(f(a)) &= f(\sigma(a)) \\ \text{δηλαδή } \sigma(f(a)) &= \{f(z) : z \in \sigma(a)\}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Αφου ο μετασχηματισμος Gelfand ειναι ισομορφισμος, διατηρει το φασμα. Συνεπως $\sigma(f(a)) = \sigma(\widehat{f(a)})$. Ομως οπως ειδαμε στην αποδειξη του θεωρηματος, εχουμε $\widehat{f(a)} = \hat{b} = f \circ \hat{a}$. Αλλα $f \circ \hat{a} \in C(K)$, αρα $\sigma(f \circ \hat{a}) = (f \circ \hat{a})(K) = f(\hat{a}(K))$ και ξερουμε οτι $\hat{a}(K) = \sigma(a)$. Τελικως λοιπον

$$\sigma(f(a)) = \sigma(\widehat{f(a)}) = \sigma(f \circ \hat{a}) = (f \circ \hat{a})(K) = f(\hat{a}(K)) = f(\sigma(a)).$$

$\square$

Παρατήρηση 7. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}^\sim$ (όπου $\mathcal{A}^\sim = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ η μοναδοποίηση της $\mathcal{A}$). Το $f(a)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (ακριβέστερα, στην εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στην $\mathcal{A}^\sim$) αν-ν η συνάρτηση f μηδενίζεται στο $0 \in \sigma(a)$.

Η απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση.