# Θεωρια μεταθετικων C* -αλγεβρων: Θεώρημα Gelfand-Naimark I

**Ορισμός 1.** ***Χαρακτήρας*** *ή* πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή *σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας* μη μηδενικός *μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Δηλαδη η $\phi$ ικανοποιει*

$$\phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda\phi(b), \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

*για καθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.*

Το συνολο των χαρακτηρων μιας C* αλγεβρας μπορει να ειναι το κενο (παραδειγμα η $M_2(\mathbb{C})$). Θα δειξουμε ομως οτι οι *μεταθετικες C* -αλγεβρες* εχουν παντα «αρκετους» χαρακτηρες.

**Παρατήρηση 1.** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach* ***με μονάδα****.*
*Αν $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τοτε $\phi(a) \in \sigma(a)$, αρα $|\phi(a)| \leqslant \|a\|$.*
*Συνεπως $\|\phi\| = 1$ (αφου $\phi(\mathbf{1}) = 1$).*

*Απόδειξη.* Θετω $u := a - \phi(a)\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ και παρατηρω οτι $\phi(u) = \phi(a) - \phi(a)\phi(\mathbf{1}) = 0$. Επομενως το $u$ δεν ειναι αντιστρεψιμο, γιατι αν ηταν θα υπηρχε $b \in \mathcal{A}$ ωστε $bu = \mathbf{1}$ και τοτε $1 = \phi(\mathbf{1}) = \phi(b)\phi(u) = 0$!

Δειξαμε λοιπον οτι $a - \phi(a)\mathbf{1} \notin \operatorname{Inv}\mathcal{A}$, δηλαδη $\phi(a) \in \sigma(a)$.

Συνεπως

$$|\phi(a)| \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\| .$$

□

**Πρόταση 2.** *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach* ***με μονάδα****. Το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή-* τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ θέτω

$$D_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \|a\|\} \quad \text{και} \quad D := \prod_{a \in \mathcal{A}} D_a.$$

Δηλαδή το $D$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\theta : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $|\theta(a)| \leqslant \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Κάθε $D_a$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ επομένως, από το Θεώρημα Tychonoff (!), το $D$ είναι συμπαγής χώρος ως προς την τοπολογία γινόμενο. Αν $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in D_a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αφού $\|\phi\| \leqslant 1$), άρα $\phi \in D$. Δηλαδή το $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι υποσύνολο του $D$, και η σχετική τοπολογία είναι η ασθενής-*. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $D$.

Έστω $\phi_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και $\theta \in D$ ώστε $\phi_i(x) \to \theta(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θα δείξω ότι $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Πράγματι, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε

(α) $\theta(\mathbf{1}) = \lim \phi_i(\mathbf{1}) = 1$, αφού $\phi_i(\mathbf{1}) = 1$ για κάθε $i$.

(β) $\theta(ab) = \lim \phi_i(ab) = \lim(\phi_i(a) \cdot \phi_i(b)) = \lim \phi_i(a) \cdot \lim \phi_i(b) = \theta(a) \cdot \theta(b)$ αφού $\phi_i(ab) = \phi_i(a) \cdot \phi_i(b)$ για κάθε $i$.

(γ) $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$ αφού $\phi_i(a + b) = \phi_i(a) + \phi_i(b)$ για κάθε $i$. □

**Παρατήρηση** Η ύπαρξη μονάδας στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, ο χώρος των χαρακτήρων της $c_o(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής (άσκηση).

Ο στοχος μας ειναι τωρα να δειξουμε οτι, αν η $\mathcal{A}$ ειναι μεταθετικη C*-αλγεβρα με μοναδα, τοτε ειναι *-ισομορφικη με την $C(K)$, οπου $K$ ειναι ακριβως ο χώρος $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ των χαρακτηρων εφοδιασμενος με την ασθενη-* τοπολογια. Ηδη εχουμε μια απεικονιση απο την $\mathcal{A}$ στον $C(K)$:

**Ορισμός 2.** *Εστω $\mathcal{A}$ αλγεβρα Banach με μονάδα. Για καθε $a \in \mathcal{A}$, ονομαζουμε $\hat{a}$ την συναρτηση*

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a).$$

Παρατηρουμε αμεσως οτι $\hat{a} \in C(K)$, δηλαδη η $\hat{a}$ ειναι οντως συνεχης ως προς την ασθενη-* τοπολογια. Πραγματι, $\phi_i \xrightarrow{w*} \phi$ στον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ σημαινει ακριβως $\phi_i(x) \longrightarrow \phi(x)$ για καθε $x \in \mathcal{A}$, αρα και $\phi_i(a) \longrightarrow \phi(a)$, δηλαδη $\hat{a}(\phi_i) \longrightarrow \hat{a}(\phi)$.

**Πρόταση 3.** *Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετικη αλγεβρα Banach με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Η απεικονιση $\hat{a}$ ειναι συνεχης συναρτηση που απεικονιζει τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ επι του $\sigma(a)$.*

*Απόδειξη.* Μολις δειξαμε οτι η $\hat{a}$ ειναι συνεχης. Ότι στελνει τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ στο $\sigma(a)$ επεται απο την Παρατηρηση 1, οτι για καθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, ο αριθμος $\phi(a)$ ανηκει στο φασμα του $a$, δηλαδη $\hat{a}(\phi) \in \sigma(a)$.

Μενει να δειχθει το «επι». Εστω λοιπον $\lambda \in \sigma(a)$. Θα δειξουμε οτι υπαρχει χαρακτηρας $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ωστε $\hat{a}(\phi) = \lambda$, δηλαδη $\phi(a) = \lambda$, ισοδυναμα $\phi(a - \lambda\mathbf{1}) = 0$ (αφου $\phi(\mathbf{1}) = 1$).

Θεωρουμε το ιδεωδες $\mathcal{J}_0$ της $\mathcal{A}$ που παραγεται απο το $a - \lambda\mathbf{1}$:

$$\mathcal{J}_0 := \{b(a - \lambda\mathbf{1}) : b \in \mathcal{A}\}.$$

Ειναι αμεσο οτι το $\mathcal{J}_0$ ειναι ιδεωδες της $\mathcal{A}$, και ειναι γνησιο: δεν περιεχει την $\mathbf{1}$, γιατι αλλιως θα υπηρχε $b \in \mathcal{A}$ ωστε $b(a - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1} = (a - \lambda\mathbf{1})b$ (αβελιανη αλγεβρα) που σημαινει οτι το $a - \lambda\mathbf{1}$ θα ηταν αντιστρεψιμο.

Μια εφαρμογη του Λημματος Zorn στην οικογενεια **S** ολων των γνησιων ιδεωδων της $\mathcal{A}$ που περιεχουν το $\mathcal{J}_0$ δειχνει οτι υπαρχει ενα μεγιστικο ιδεωδες $\mathcal{M}$ της $\mathcal{A}$ που περιεχει το $a - \lambda\mathbf{1}$.[1]

*Ισχυρισμος: Το $\mathcal{M}$ είναι κλειστο.* Πραγματι η κλειστη του θηκη $\overline{\mathcal{M}}$ ειναι ιδεωδες. Ομως $\mathrm{dist}(\mathbf{1}, \mathcal{M}) \geqslant 1$, γιατι αν καποιο $m \in \mathcal{M}$ ικανοποιει $\|\mathbf{1} - m\| < 1$ τότε το $m$ ειναι αντιστρεψιμο, οπως εχουμε δειξει (χρησιμοποιωντας την πληροτητα της $\mathcal{A}$!), ενω το $\mathcal{M}$ δεν περιεχει αντιστρεψιμα στοιχεια. Επομενως $\mathrm{dist}(\mathbf{1}, \overline{\mathcal{M}}) \geqslant 1$, αρα το $\overline{\mathcal{M}}$ ειναι γνησιο ιδεωδες, και συνεπως ισο με $\mathcal{M}$ λογω μεγιστικοτητας.

Θεωρουμε λοιπον το πηλικο $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{M}$ και την κανονικη απεικονιση πηλικο $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} : a \mapsto a + \mathcal{M}$. Με πραξεις $\pi(a) + \lambda\pi(a') = \pi(a + \lambda a')$, $\pi(a.a') = \pi(a).\pi(a')$ (καλα ορισμενες αφου το $\mathcal{M}$ ειναι ιδεωδες) γινεται μεταθετικη αλγεβρα με μοναδα την $\pi(\mathbf{1})$. Επισης η $\mathcal{B}$ ειναι (ως γνωστο) χωρος Banach με τη νορμα πηλικο $\|\pi(a)\|_q = \mathrm{dist}(a, \mathcal{M})$. Τελος, ειναι αλγεβρα Banach, γιατι $\|\pi(a.a')\|_q \leqslant \|\pi(a)\|_q \|\pi(a')\|_q$.[2]

[1] Αν θεωρησω μια αλυσιδα στην **S**, τοτε ευκολα προκυπτει οτι η ενωση τους, που περιεχει το $\mathcal{J}_0$, ειναι ιδεωδες, και ειναι γνησιο επειδη κανενα απ τα στοιχεια της αλυσιδας δεν περιεχει τη μοναδα, αρα ουτε η ενωση την περιεχει. Επομενως η **S** εχει μεγιστικο στοιχειο, εστω $\mathcal{M}$, και ευκολα φαινεται ότι το $\mathcal{M}$ ειναι μεγιστικο στην οικογενεια των γνησιων ιδεωδων της $\mathcal{A}$.

[2] Πραγματι, αν $x, y \in \mathcal{M}$ εχουμε

$$\|(a + x)(a' + y)\| \leqslant \|a + x\|.\|a' + y\|.$$

Αλλα $(a + x)(a' + y) = aa' + (ay + xa' + xy)$ και $ay + xa' + xy \in \mathcal{M}$, αρα $\|(a + x)(a' + y)\| \geqslant \mathrm{dist}(aa', \mathcal{M})\| = \|\pi(aa')\|_q$. Επομενως η προηγουμενη ανισοτητα δινει

$$\|[\pi(aa')\|_q \leqslant \|a + x\|.\|a' + y\|$$

για καθε $x, y \in \mathcal{M}$, και το συμπερασμα επεται παιρνοντας infimum ως προς $x$ και $y$.

Η $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{M}$ ειναι λοιπον μεταθετικη αλγεβρα Banach με μοναδα.

*Ισχυρισμος* Καθε μη μηδενικο στοιχειο της $\mathcal{B}$ ειναι αντιστρεψιμο.

Πραγματι: Εστω $b = \pi(a) \in \mathcal{B}$ διαφορο του μηδενος, δηλ. $a \notin \mathcal{M}$. Θεωρουμε το

$$\mathcal{J} := \{aa' + m : a' \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Ευκολα φαινεται οτι ειναι ιδεωδες της $\mathcal{A}$. Επισης, περιεχει το $\mathcal{M}$ (βαλε $a' = 0$) και το περιεχει γνησια, γιατι περιεχει και το $a$ (βαλε $a' = \mathbf{1}$ και $m = 0$) . Απο τη μεγιστικοτητα του $\mathcal{M}$ συμπεραινουμε οτι $\mathcal{J} = \mathcal{A}$, αρα $\mathbf{1} \in \mathcal{J}$. Υπαρχουν λοιπον $a' \in \mathcal{A}$ και $m \in \mathcal{M}$ ωστε $aa' + m = \mathbf{1}$, αρα $\pi(a).\pi(a') = \pi(aa') = [\mathbf{1}]$. Δειξαμε οτι το $b = \pi(a)$ ειναι αντιστρεψιμο στην $\mathcal{B}$.

Απο την αλλη μερια ομως, καθε στοιχειο $\pi(x) \in \mathcal{B}$ εχει μη κενο φασμα. Υπαρχει λοιπον $\lambda_x \in \mathbb{C}$ ωστε το $\lambda_x \pi(\mathbf{1}) - \pi(x)$ να μην ειναι αντιστρεψιμο, οποτε, απο τον προηγουμενο Ισχυρισμο, θα ειναι μηδεν: $\pi(x) = \lambda_x \pi(\mathbf{1})$. Φυσικα το $\lambda_x$ οριζεται μοναδικα απ το $\pi(x)$: αν $\lambda' \pi(\mathbf{1}) = \pi(x)$ τοτε $\lambda' \pi(\mathbf{1}) = \lambda_x \pi(\mathbf{1})$ αρα $\lambda' = \lambda_x$.

Δειξαμε λοιπον οτι καθε (μη μηδενικο) στοιχειο της αλγεβρας πηλικο $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ ειναι μιγαδικο πολλαπλασιο της μοναδας $\pi(\mathbf{1})$.

Εχουμε ετσι κατασκευασει μια απεικονιση

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathbb{C} : x \mapsto \pi(x) \mapsto \lambda_x$$

η οποια ειναι μορφισμος αλγεβρων (πχ εχουμε, αν $\pi(x) = \lambda_x \pi(\mathbf{1})$ και $\pi(y) = \lambda_y \pi(\mathbf{1})$ τοτε $\lambda_x \lambda_y \pi(\mathbf{1}) = \pi(x)\pi(y) = \pi(xy) = \lambda_{xy}\pi(\mathbf{1})$ αρα $\lambda_x \lambda_y = \lambda_{xy}$ και το ιδιο με το αθροισμα). Επισης εχουμε $\pi(\mathbf{1}) = \lambda_{\mathbf{1}} \pi(\mathbf{1})$ αρα $\phi(\mathbf{1}) = 1$ άρα η $\phi$ ειναι χαρακτηρας της $\mathcal{A}$.

Παρατηρουμε τελος οτι αν $\pi(x) = 0$ δηλ. αν $\pi(x) \in \mathcal{M}$ τοτε $\phi(x) = 0$. Επομενως, αν θυμηθουμε οτι $a - \lambda\mathbf{1} \in \mathcal{M}$, εχουμε $\phi(a - \lambda\mathbf{1}) = 0$ δηλαδη $\phi(a) = \lambda$.

Τελικως, για καθε $\lambda \in \sigma(a)$ βρηκαμε ενα $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ωστε $\phi(a) = \lambda$, οπως θελαμε. $\square$

**Ορισμός 3.** *Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετικη αλγεβρα Banach με μοναδα. Ο **μετασχηματισμός Gelfand** ειναι η απεικονιση*

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*) : x \mapsto \hat{x}$$

*οπου*

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(x).$$

**Θεώρημα 4** (Gelfand - Naimark)**.** *Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετικη αλγεβρα Banach με μονάδα. Ο μετασχηματισμός Gelfand*

*(α) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.*

*(β) Ικανοποιεί $\hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.*

*(γ) Είναι συνεχής, μάλιστα*

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leqslant \|x\|.$$

*για κάθε $x \in \mathcal{A}$.*

*Απόδειξη.* *(α)* Για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ έχουμε

$$(\hat{x} + \hat{y})(\phi) = \hat{x}(\phi) + \hat{y}(\phi) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y) = (\widehat{x + y})(\phi)$$

επειδή η $\phi$ είναι γραμμική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(x + y).$$

Επίσης

$$(\hat{x} \cdot \hat{y})(\phi) = \hat{x}(\phi) \cdot \hat{y}(\phi) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(xy) = \widehat{xy}(\phi)$$

επειδή η $\phi$ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) \cdot \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(xy).$$

Άρα η $\mathcal{G}$ είναι μορφισμός αλγεβρών, και

$$\mathcal{G}(\mathbf{1})(\phi) = \phi(\mathbf{1}) = 1$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

*(β)* Για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε από την Πρόταση 3

$$\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \{\hat{x}(\phi) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})).$$

*(γ)* Από το *(β)* έχουμε

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(\phi)| : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \rho(x) \leqslant \|x\|.$$

□

Περναμε τωρα σε μεταθετικες C* αλγεβρες. Θα χρειασθει η ακολουθη Προταση:

**Πρόταση 5.** *Αν $\mathcal{A}$ ειναι C*-αλγεβρα με μοναδα $\mathbf{1}$, καθε χαρακτηρας $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ικανοποιει*

$$\phi(y^*) = \overline{\phi(y)} \quad \textit{για καθε } y \in \mathcal{A}.$$

*Απόδειξη.* *(i)* Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$ ισχύει ότι $\phi(a) \in \mathbb{R}$. Πράγματι: Έστω $\phi(a) = \lambda + i\mu$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το $b_n = a + in\mathbf{1}$ και έχουμε

$$\phi(b_n) = \phi(a) + in\phi(\mathbf{1}) = \lambda + i(\mu + n) \quad \text{αφού } \phi(\mathbf{1}) = 1.$$

Επομένως, $\quad \lambda^2 + (\mu + n)^2 = |\phi(b_n)|^2 \leqslant \|b_n\|^2 \quad$ αφού $\|\phi\| = 1$.

$$\text{Άρα } \lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n \leqslant \|b_n\|^2 = \|b_n^* b_n\| = \left\|a^2 + n^2\mathbf{1}\right\| \leqslant \left\|a^2\right\| + n^2$$
$$\text{δηλαδή, } 2\mu n \leqslant \left\|a^2\right\| - \lambda^2 - \mu^2.$$

Η ανισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, παρά μόνον αν $\mu = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\phi(a) \in \mathbb{R}$.

*(ii)* Για τη γενική περίπτωση: Κάθε $y \in \mathcal{A}$ γράφεται μοναδικά $y = y_1 + iy_2$ με $y_i^* = y_i$ (όπου $y_1 = (y + y^*)/2$, $y_2 = (y - y^*)/2i$). Επειδή $y_i^* = y_i$, έχουμε $\phi(y_i) \in \mathbb{R}$ από το *(i)*. Συνεπώς

$$\phi(y^*) = \phi(y_1 - iy_2) = \phi(y_1) - i\phi(y_2) = \overline{\phi(y_1) + i\phi(y_2)} = \overline{\phi(y)}. \qquad \square$$

**Παρατήρηση** Στην απόδειξη της Πρότασης, οι μόνες ιδιότητες του $\phi$ που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι $\phi(\mathbf{1}) = 1$ και ότι $\|\phi\| = 1$. Επομένως το συμπέρασμα του ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ που έχει αυτές τις δύο ιδιότητες. Μάλιστα, είναι φανερό ότι αρκεί η ιδιότητα $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$. Παρατήρησε επίσης ότι η μεταθετικότητα της $C^*$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ δεν χρησιμοποιήθηκε.

**Εφαρμογη σε γενικες C* αλγεβρες.** Στο επομενο Πορισμα, δεν απαιτειται η μεταθετικοτητα της C* αλγεβρας $\mathcal{A}$.

**Πόρισμα 6.** *Εστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα και $a \in \mathcal{A}$.*

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}\,.$$

*Απόδειξη.* Υπενθυμιση: Αν η $\mathcal{A}$ δεν εχει μοναδα, το $\sigma(a)$ υπολογιζεται στη μοναδοποιηση. Μπορω λοιπον να υποθεσω οτι η $\mathcal{A}$ εχει μοναδα.

Αν $\lambda \in \sigma(a)$, το στοιχείο $a - \lambda\mathbf{1}$ δεν είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, επομένως δεν είναι αντιστρέψιμο στην μεταθετική C*-άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ που παράγει το $a$ και η $\mathbf{1}$. Έπεται ότι υπάρχει ένας χαρακτήρας $\phi$ της $C^*(\mathbf{1}, a)$ με $\phi(a - \lambda\mathbf{1}) = 0$, άρα $\phi(a) = \lambda$. Αφού $a = a^*$, από την Πρόταση έχουμε ότι $\lambda = \phi(a) \in \mathbb{R}$. $\square$

**Θεώρημα 7** (Gelfand-Naimark). *Κάθε μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ όπου $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$: Ο μετασχηματισμός Gelfand:*

$$\mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A})) : \; a \mapsto \hat{a}$$

*(όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a),\; \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$) είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}$* επί *της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε πρώτα ότι ο μετασχηματισμός Gelfand είναι *-μορφισμός. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5,

$$\widehat{x^*}(\phi) = \phi(x^*) = \overline{\phi(x)} = \overline{\hat{x}(\phi)}, \quad \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\,.$$

Επομένως η εικόνα $\widehat{\mathcal{A}} = \{\hat{a} : a \in \mathcal{A}\}$ της $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ που περιέχει την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$. Επίσης, χωρίζει τα σημεία του χώρου $\mathcal{M}(\mathcal{A})$: αν $\phi \neq \psi$ είναι χαρακτήρες, υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\hat{a}(\phi) \neq \hat{a}(\psi)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Stone -Weierstrass (δες τη διατύπωση πιο κάτω), η $\widehat{\mathcal{A}}$ είναι πυκνή *-υπάλγεβρα της $(C(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$.

Όμως, έχουμε δείξει ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει η ισότητα

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \|\hat{a}\|_\infty &= \sup\{|\hat{a}(\phi)| : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \sup\{|\phi(a)| : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\| \end{aligned}$$

γιατί η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, άρα η νόρμα κάθε στοιχείου της ισούται με τη φασματική του ακτίνα.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρία, οπότε η εικόνα του $\widehat{\mathcal{A}}$ είναι πλήρης, άρα κλειστή στην $(C(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$. Είναι όμως και πυκνή, οπότε τελικά $\widehat{\mathcal{A}} = C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$. $\square$

**Υπενθύμιση: Θεώρημα Stone – Weierstrass**
Έστω $K$ συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum).

Έστω $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του $X$ (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$).

*Τότε* η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$. [3]

**Μεταθετικές $C^*$-άλγεβρες χωρίς μονάδα**

**Παράδειγμα 8.** *Εστω $K$ τοπικα συμπαγης χωρος Hausdorff.* [4] *Μια $f : K \to \mathbb{C}$* μηδενιζεται στο απειρο *αν για καθε $\epsilon > 0$ υπαρχει $K_f^\epsilon \subseteq K$ συμπαγες ωστε $|f(t)| < \epsilon$ για καθε $t \notin K_f^\epsilon$. Η αλγεβρα*

$$C_0(K) := \{f \in C(K) : \text{ η } f \text{ μηδενιζεται στο απειρο}\}$$

*με πραξεις και ενελιξη κατα σημειο και νορμα supremum ειναι μεταθετικη $C^*$-άλγεβρα. Η $C_0(K)$ εχει μοναδα αν και μονον αν ο $K$ ειναι συμπαγης.*

Παρατηρησε οτι μια συνεχης $f : K \to \mathbb{C}$ που μηδενιζεται στο απειρο ειναι αναγκαστικα φραγμενη, γιατι για καθε $\epsilon > 0$ είναι φραγμενη (απο το $\epsilon$) εξω απ το $K_f^\epsilon$, αλλα και στο $K_f^\epsilon$ ειναι φραγμενη (συνεχης σε συμπαγες).

Αν ο $K$ ειναι συμπαγης, τοτε η $C_0(K)$ ειναι η $C(K)$ (παρε για $K_f^\epsilon$ το $\emptyset$) κι εχει μοναδα (τη σταθερη συναρτηση $\mathbf{1}$).

Αν παλι η $C_0(K)$ εχει μοναδα $e$, θα δειξω οτι ο $K$ ειναι συμπαγης. Ισχυριζομαι πρωτα οτι $e(t) = 1$ για καθε $t \in K$. Πραγματι, απο το Λημμα Urysohn (Folland, Real Analysis, 4.32) για καθε ανοιχτη περιοχη $U$ του $t$ υπαρχει $f : K \to [0, 1]$ συνεχης, ωστε $f(t) = 1$, και η $f$ μηδενιζεται εξω απο καποιο συμπαγες υποσυνολο του $U$, αρα ανηκει στην $C_0(K)$. Αφου η $e$ ειναι μοναδα της $C_0(K)$, εχουμε $ef = f$, αρα $e(t)f(t) = f(t)$ δηλαδη $e(t) = 1$. Δηλαδη η $e$ ειναι η σταθερη συναρτηση $\mathbf{1}$. Επομενως το συνολο των σημειων $t \in K$ ωστε $|e(t) < 1/2$ είναι το κενο, δηλαδη το συμπαγες $K_e^{1/2}$ του ορισμου ειναι ολος ο χωρος $K$. Δειξαμε οτι ο $K$ ειναι συμπαγης.

**Θεώρημα 9** (Gelfand - Naimark)**.** *Αν $\mathcal{A}$ ειναι μεταθετικη $C^*$-άλγεβρα χωρις μοναδα, και $K = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ο χωρος των χαρακτηρων της με την ασθενη-* τοπολογια, τοτε η απεικονιση Gelfand $\mathcal{G} : a \mapsto \hat{a}$ είναι ισομετρικος *-ισομορφισμος απο την $\mathcal{A}$ επι της $C_0(K)$.*

*Απόδειξη.* Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική $C^*$-άλγεβρα χωρίς μονάδα, η μοναδοποίηση της, $\mathcal{A}_1$ είναι μεταθετική $C^*$ -άλγεβρα με μονάδα.

[3] Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf` στην `http://eclass.uoa.gr/courses/MATH287/`.
[4] Δηλαδη καθε $t \in K$ εχει μια συμπαγη περιοχη: υπαρχει συμπαγες $F_t \subseteq K$ ωστε $t \in F_t^o$ - για παράδειγμα, ο $\mathbb{R}$.

Επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathcal{G}_1 : a \longrightarrow \hat{a}$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}_1$ επί της $C(K_1)$, όπου $K_1$ το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$ των χαρακτήρων της $\mathcal{A}_1$ με την ασθενή-* τοπολογία.

Κάθε χαρακτήρας $\phi$ της $\mathcal{A}$ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν χαρακτήρα $\tilde{\phi}$ της $\mathcal{A}_1$ θέτοντας $\tilde{\phi}(x, \lambda) := \phi(x)+\lambda$. Αντιστροφα κάθε χαρακτήρας της $\mathcal{A}_1$, περιοριζόμενος στην $\mathcal{A}$, ορίζει έναν χαρακτήρα της $\mathcal{A}$, εκτος απο τον (μοναδικο) χαρακτηρα $\psi_\infty$ της $\mathcal{A}_1$ που οριζεται απο την σχεση

$$\psi_\infty((a, \lambda)) = \lambda, \quad (a, \lambda) \in \mathcal{A}_1$$

(δηλαδη $\psi_\infty|\mathcal{A} = 0$).

Δηλαδή αν ονομάσουμε $K_o \subseteq K_1$ το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}_1$ που δεν μηδενίζουν την $\mathcal{A}$, έχουμε $K_1 = K_o \cup \{\psi_\infty\}$ και $K_o = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$.

• **Ισχυρισμός** *Αν $K$ είναι ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$, τότε ο $K$ είναι ομοιομορφικός με τον $K_o$.*

Πράγματι, αν $\phi_i, \phi \in K$ τότε $\phi_i(x) \longrightarrow \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ αν και μόνον αν $\tilde{\phi}_i(x, \lambda) \longrightarrow \tilde{\phi}(x, \lambda)$ για κάθε $(x, \lambda) \in \mathcal{A}_1$. Άρα η απεικόνιση $\phi \to \tilde{\phi} : K \to K_o$ είναι ομοιομορφισμός.

Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{A}$ και $\phi \in K$ ισχύει $\tilde{\phi}(x, 0) = \phi(x)$. Επομένως, αν ταυτίσουμε τους χώρους $K$ και $K_o$ (μέσω της απεικόνισης $\phi \to \tilde{\phi}$), ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{G} : x \mapsto \hat{x}$ του $x$ (ως προς την $\mathcal{A}$) δεν είναι παρά ο περιορισμός του μετασχηματισμού Gelfand $\mathcal{G}_1 : (x, 0) \mapsto \widehat{(x, 0)}$ (ως προς την $\mathcal{A}_1$) στον $K_o$, δηλαδή

$$\widehat{(x, 0)}(\tilde{\phi}) = \hat{x}(\phi) \quad \phi \in K.$$

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $\widehat{(x, 0)}$ με $x \in \mathcal{A}$ είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις $f \in C(K_1)$ με την ιδιότητα $f(\psi_\infty) = 0$. Πράγματι κάθε $f \in C(K_1)$ είναι της μορφής $f = \mathcal{G}_1(a) = \hat{a}$ για ένα (μοναδικό) $a \in \mathcal{A}_1$, και ισχύει $\hat{a}(\psi_\infty) = 0$ αν και μόνον αν $\psi_\infty(a) = 0$, δηλαδή αν και μόνον $a \in \mathcal{A}$.

• Επομένως η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρική και *-ισομορφική με την $C^*$-άλγεβρα $\{f \in C(K_1) : f(\psi_\infty) = 0\}$.

• Αλλά η απεικόνιση $\pi : f \to f|_{K_o}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός της $\{f \in C(K_1) : f(\psi_\infty) = 0\}$ επί της $C_o(K_o)$.

Πράγματι: αν μία $f \in C(K_1)$ μηδενίζεται στο σημείο $\psi_\infty$ τότε (αφού είναι συνεχής στο $\psi_\infty$) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq K_1$ του $\psi_\infty$ ώστε $|f(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \in U$. Θέτοντας $\Omega = U^c$, που είναι συμπαγές υποσύνολο του $K_o$, βλέπουμε ότι $f|_{K_o} \in C_o(K_o)$ (και φυσικά $\|f\|_\infty = \|f|_{K_o}\|_\infty$).

Αντίστροφα, κάθε $g \in C_o(K_o)$ επεκτείνεται στο $K_1$ θέτοντας $g(\psi_\infty) = 0$. Η επέκταση είναι συνεχής στο $\psi_\infty$, γιατί για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon \subseteq K_o$ συμπαγές ώστε $|g(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \notin K_\varepsilon$ (αφού $g \in C_o(K_o)$), δηλαδή υπάρχει ανοικτή περιοχή $U = (K_\varepsilon)^c$ του $\psi_\infty$ όπου $|g(\psi)| < \varepsilon$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η συνθεση

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{G}_1} \{f \in C(K_1) : f(\psi_\infty) = 0\} \xrightarrow{\pi} C_o(K_o)$$

ειναι ισομετρικος *-ισομορφισμος. Αλλα η συνθεση αυτη δεν ειναι τιποτε αλλο απο τον μετασχηματισμο Gelfand $\mathcal{G}$ της $\mathcal{A}$. Πραγματι, αν $a \in \mathcal{A}$ εχουμε για καθε $\phi \in K$, επειδη $\tilde{\phi} \in K_o$,

$$\mathcal{G}_1((a, 0))|_{K_o}(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}((a, 0)) = \phi(a) = \mathcal{G}(a)(\phi)\,.$$

Η αποδειξη εχει ολοκληρωθει. $\square$

**Παρατήρηση 10.** *Ο χωρος* $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$ *ειναι τοπικα συμπαγης χώρος Hausdorff.*

*Απόδειξη.* Αφου ο χωρος αυτος ειναι ομοιομορφικος με τον $K_o$ (με την επαγομενη απο τον $K_1$ ασθενη-* τοπολογια) αρκει να δειξω οτι ο $K_o$ ειναι τοπικα συμπαγης χώρος Hausdorff. Πραγματι για καθε $\psi \in K_o$ υπαρχουν ξενα ανοιχτα υποσυνολα $U, V$ του $K_1$ ώστε $\psi \in U$ και $\psi_\infty \in V$ οποτε το $F := V^c$ ειναι κλειστο υποσυνολο του $K_1$, αρα συμπαγες και δεν περιεχει το $\psi_\infty$, αρα $F \subseteq K_o$ και αφου $\psi \in U \subseteq F$ το $F$ ειναι συμπαγης περιοχη του $\psi$. □

Συνοψιζοντας, εχουμε

**Θεώρημα 11.** *Αν* $\mathcal{A}$ *μεταθετική* $C^*$*-άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της* $\mathcal{A}$ *επί της* $C_o(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$*. Η* $\mathcal{A}$ *έχει μονάδα αν και μόνον αν ο* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *είναι* $w^*$*-συμπαγής.*