

Θεωρία μεταθετικών C^* -αλγεβρων: Θεώρημα Gelfand-Naimark I

Ορισμός 1. *Χαρακτήρας* ή πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας μη μηδενικός μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Δηλαδή η ϕ ικανοποιεί

$$\phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda \phi(b), \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.

Το σύνολο των χαρακτήρων μιας C^* άλγεβρας μπορεί να είναι το κενό (παραδειγμα η $M_2(\mathbb{C})$). Θα δείξουμε όμως ότι οι μεταθετικές C^* -άλγεβρες έχουν πάντα «αρκετούς» χαρακτήρες.

Παρατήρηση 1. Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα.

Αν $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in \sigma(a)$, άρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.

Συνεπώς $\|\phi\| = 1$ (αφού $\phi(\mathbf{1}) = 1$).

Απόδειξη. Θεω $u := a - \phi(a)\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ και παρατηρώ ότι $\phi(u) = \phi(a) - \phi(a)\phi(\mathbf{1}) = 0$. Επομένως το u δεν είναι αντιστρεψίμο, γιατί αν ήταν θα υπήρχε $b \in \mathcal{A}$ ώστε $bu = \mathbf{1}$ και τότε $1 = \phi(\mathbf{1}) = \phi(b)\phi(u) = 0$!

Δειξάμε λοιπόν ότι $a - \phi(a)\mathbf{1} \notin \text{Inv } \mathcal{A}$, δηλαδή $\phi(a) \in \sigma(a)$.

Συνεπώς

$$|\phi(a)| \leq \rho(a) \leq \|a\|.$$

□

Πρόταση 2. Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή-* τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ θέτω

$$D_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\} \quad \text{και} \quad D := \prod_{a \in \mathcal{A}} D_a.$$

Δηλαδή το D είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $|\theta(a)| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Κάθε D_a είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ επομένως, από το Θεώρημα Tychonoff (!), το D είναι συμπαγής χώρος ως προς την τοπολογία γινόμενο. Αν $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in D_a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αφού $\|\phi\| \leq 1$), άρα $\phi \in D$. Δηλαδή το $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι υποσύνολο του D , και η σχετική τοπολογία είναι η ασθενής-*. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι κλειστό υποσύνολο του D .

Έστω $\phi_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ και $\theta \in D$ ώστε $\phi_i(x) \rightarrow \theta(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θα δείξω ότι $\theta \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Πράγματι, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε

(α) $\theta(\mathbf{1}) = \lim \phi_i(\mathbf{1}) = 1$, αφού $\phi_i(\mathbf{1}) = 1$ για κάθε i .

(β) $\theta(ab) = \lim \phi_i(ab) = \lim(\phi_i(a) \cdot \phi_i(b)) = \lim \phi_i(a) \cdot \lim \phi_i(b) = \theta(a) \cdot \theta(b)$ αφού $\phi_i(ab) = \phi_i(a) \cdot \phi_i(b)$ για κάθε i .

(γ) $\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$ αφού $\phi_i(a + b) = \phi_i(a) + \phi_i(b)$ για κάθε i . □

Παρατήρηση Η ύπαρξη μονάδας στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παραδείγματος χάριν, ο χώρος των χαρακτήρων της $c_0(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής (άσκηση).

Ο στοχος μας είναι τώρα να δείξουμε ότι, αν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C^* -αλγεβρα με μονάδα, τότε είναι $*$ -ισομορφική με την $C(K)$, όπου K είναι ακριβώς ο χώρος $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ των χαρακτήρων εφοδιασμένος με την ασθενή- $*$ τοπολογία. Ήδη έχουμε μια απεικόνιση από την $\mathcal{A}$ στον $C(K)$:

Ορισμός 2. Εστω $\mathcal{A}$ αλγεβρα Banach με μονάδα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ονομάζουμε $\hat{a}$ την συναρτησή

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a).$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι $\hat{a} \in C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$, δηλαδή η $\hat{a}$ είναι οντως συνεχής ως προς την ασθενή- $*$ τοπολογία. Πραγματι, $\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi$ στον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ σημαίνει ακριβώς $\phi_i(x) \rightarrow \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$, άρα και $\phi_i(a) \rightarrow \phi(a)$, δηλαδή $\hat{a}(\phi_i) \rightarrow \hat{a}(\phi)$.

Πρόταση 3. Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετική αλγεβρα Banach με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση $\hat{a}$ είναι συνεχής συναρτησή που απεικονίζει τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ επί του $\sigma(a)$.

Απόδειξη. Μόλις δείξαμε ότι η $\hat{a}$ είναι συνεχής. Ότι στέλνει τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ στο $\sigma(a)$ έπεται από την Παρατήρηση 1, ότι για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, ο αριθμός $\phi(a)$ ανήκει στο φάσμα του a , δηλαδή $\hat{a}(\phi) \in \sigma(a)$.

Μένει να δείχθει το «επί». Εστω λοιπόν $\lambda \in \sigma(a)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει χαρακτήρας $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ώστε $\hat{a}(\phi) = \lambda$, δηλαδή $\phi(a) = \lambda$, ισοδύναμα $\phi(a - \lambda \mathbf{1}) = 0$ (αφού $\phi(\mathbf{1}) = 1$).

Θεωρούμε το ιδεώδες $\mathcal{J}_0$ της $\mathcal{A}$ που παραγεται από το $a - \lambda \mathbf{1}$:

$$\mathcal{J}_0 := \{b(a - \lambda \mathbf{1}) : b \in \mathcal{A}\}.$$

Είναι αμέσως ότι το $\mathcal{J}_0$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$, και είναι γνήσιο: δεν περιέχει την $\mathbf{1}$, γιατί αλλιώς θα υπήρχε $b \in \mathcal{A}$ ώστε $b(a - \lambda \mathbf{1}) = \mathbf{1} = (a - \lambda \mathbf{1})b$ (αβελιανή αλγεβρα) που σημαίνει ότι το $a - \lambda \mathbf{1}$ θα ήταν αντιστρεψίμο.

Μια εφαρμογή του Λήμματος Zorn στην οικογένεια $\mathbf{S}$ όλων των γνήσιων ιδεωδών της $\mathcal{A}$ που περιέχουν το $\mathcal{J}_0$ δείχνει ότι υπάρχει ένα μεγιστικό ιδεώδες $\mathcal{M}$ της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $a - \lambda \mathbf{1}$.¹

Ισχυρισμός: Το $\mathcal{M}$ είναι κλειστό. Πραγματι η κλειστή του θήκη $\overline{\mathcal{M}}$ είναι ιδεώδες. Ομως $\text{dist}(\mathbf{1}, \mathcal{M}) \geq 1$, γιατί αν κάποιο $m \in \mathcal{M}$ ικανοποιεί $\|\mathbf{1} - m\| < 1$ τότε το m είναι αντιστρεψίμο, όπως έχουμε δείξει (χρησιμοποιώντας την πληρότητα της $\mathcal{A}$!), ενώ το $\mathcal{M}$ δεν περιέχει αντιστρεψίμα στοιχεία. Επομένως $\text{dist}(\mathbf{1}, \overline{\mathcal{M}}) \geq 1$, άρα το $\overline{\mathcal{M}}$ είναι γνήσιο ιδεώδες, και συνεπώς ίσο με $\mathcal{M}$ λόγω μεγιστικότητας.

Θεωρούμε λοιπόν το πηλίκο $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{M}$ και την κανονική απεικόνιση πηλίκου $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} : a \mapsto a + \mathcal{M}$. Με πράξεις $\pi(a) + \lambda\pi(a') = \pi(a + \lambda a')$, $\pi(a \cdot a') = \pi(a) \cdot \pi(a')$ (καλά ορισμένες αφού το $\mathcal{M}$ είναι ιδεώδες) γίνεται μεταθετική αλγεβρα με μονάδα την $\pi(\mathbf{1})$. Επίσης η $\mathcal{B}$ είναι (ως γνωστό) χώρος Banach με τη νόρμα πηλίκου $\|\pi(a)\|_q = \text{dist}(a, \mathcal{M})$. Τέλος, είναι αλγεβρα Banach, γιατί $\|\pi(a \cdot a')\|_q \leq \|\pi(a)\|_q \|\pi(a')\|_q$.²

¹ Αν θεωρήσω μια αλυσίδα στην $\mathbf{S}$, τότε εύκολα προκύπτει ότι η ένωση τους, που περιέχει το $\mathcal{J}_0$, είναι ιδεώδες, και είναι γνήσιο επειδή κανένα από τα στοιχεία της αλυσίδας δεν περιέχει τη μονάδα, άρα ούτε η ένωση την περιέχει. Επομένως η $\mathbf{S}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, εστω $\mathcal{M}$, και εύκολα φαίνεται ότι το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστικό στην οικογένεια των γνήσιων ιδεωδών της $\mathcal{A}$.

² Πραγματι, αν $x, y \in \mathcal{M}$ έχουμε

$$\|(a+x)(a'+y)\| \leq \|a+x\| \cdot \|a'+y\|.$$

Αλλά $(a+x)(a'+y) = aa' + (ay + xa' + xy)$ και $ay + xa' + xy \in \mathcal{M}$, άρα $\|(a+x)(a'+y)\| \geq \text{dist}(aa', \mathcal{M}) = \|\pi(aa')\|_q$. Επομένως η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$\|\pi(aa')\|_q \leq \|a+x\| \cdot \|a'+y\|$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$, και το συμπέρασμα έπεται παίρνοντας infimum ως προς x και y .

Η $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{M}$ είναι λοιπόν μεταθετική αλγεβρα Banach με μονάδα.

Ισχυρισμός Κάθε μη μηδενικό στοιχείο της $\mathcal{B}$ είναι αντιστρεψίμο.

Πραγματι: Εστω $b = \pi(a) \in \mathcal{B}$ διάφορο του μηδενός, δηλ. $a \notin \mathcal{M}$. Θεωρούμε το

$$\mathcal{J} := \{aa' + m : a' \in \mathcal{A}, m \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{A}.$$

Ευκόλα φαίνεται ότι είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Επίσης, περιέχει το $\mathcal{M}$ (βάλτε $a' = 0$) και το περιέχει γνησία, γιατί περιέχει και το a (βάλτε $a' = \mathbf{1}$ και $m = 0$). Από τη μεγιστικότητα του $\mathcal{M}$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{J} = \mathcal{A}$, άρα $\mathbf{1} \in \mathcal{J}$. Υπάρχουν λοιπόν $a' \in \mathcal{A}$ και $m \in \mathcal{M}$ ώστε $aa' + m = \mathbf{1}$, άρα $\pi(a) \cdot \pi(a') = \pi(aa') = [\mathbf{1}]$. Δείξαμε ότι το $b = \pi(a)$ είναι αντιστρεψίμο στην $\mathcal{B}$.

Από την άλλη μεριά όμως, κάθε στοιχείο $\pi(x) \in \mathcal{B}$ έχει μη κενό φάσμα. Υπάρχει λοιπόν $\lambda_x \in \mathbb{C}$ ώστε το $\lambda_x \pi(\mathbf{1}) - \pi(x)$ να μην είναι αντιστρεψίμο, οπότε, από τον προηγούμενο Ισχυρισμό, θα είναι μηδέν: $\pi(x) = \lambda_x \pi(\mathbf{1})$. Φυσικά το λ_x ορίζεται μοναδικά απ το $\pi(x)$: αν $\lambda' \pi(\mathbf{1}) = \pi(x)$ τότε $\lambda' \pi(\mathbf{1}) = \lambda_x \pi(\mathbf{1})$ άρα $\lambda' = \lambda_x$.

Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε (μη μηδενικό) στοιχείο της αλγεβρας πηλικο $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ είναι μιγαδικό πολλαπλασίο της μονάδας $\pi(\mathbf{1})$.

Εχουμε έτσι κατασκευάσει μια απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \pi(x) \mapsto \lambda_x$$

η οποία είναι μορφισμός αλγεβρών (πχ έχουμε, αν $\pi(x) = \lambda_x \pi(\mathbf{1})$ και $\pi(y) = \lambda_y \pi(\mathbf{1})$ τότε $\lambda_x \lambda_y \pi(\mathbf{1}) = \pi(x) \pi(y) = \pi(xy) = \lambda_{xy} \pi(\mathbf{1})$ άρα $\lambda_x \lambda_y = \lambda_{xy}$ και το ίδιο με το άθροισμα). Επίσης έχουμε $\pi(\mathbf{1}) = \lambda_1 \pi(\mathbf{1})$ άρα $\phi(\mathbf{1}) = 1$ άρα η ϕ είναι χαρακτήρας της $\mathcal{A}$.

Παρατηρούμε τέλος ότι αν $\pi(x) = 0$ δηλ. αν $\pi(x) \in \mathcal{M}$ τότε $\phi(x) = 0$. Επομένως, αν θυμηθούμε ότι $a - \lambda \mathbf{1} \in \mathcal{M}$, έχουμε $\phi(a - \lambda \mathbf{1}) = 0$ δηλαδή $\phi(a) = \lambda$.

Τελικώς, για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$ βρήκαμε ένα $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a) = \lambda$, όπως θέλαμε. □

Ορισμός 3. Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετική αλγεβρα Banach με μονάδα. Ο μετασχηματισμός *Gelfand* είναι η απεικόνιση

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*) : x \mapsto \hat{x}$$

οπου

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(x).$$

Θεώρημα 4 (Gelfand - Naimark). Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετική αλγεβρα Banach με μονάδα. Ο μετασχηματισμός *Gelfand*

(α) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

(β) Ικανοποιεί $\hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

(γ) Είναι συνεχής, μάλιστα

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|.$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. (α) Για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ έχουμε

$$(\hat{x} + \hat{y})(\phi) = \hat{x}(\phi) + \hat{y}(\phi) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y) = \widehat{(x + y)}(\phi)$$

επειδή η ϕ είναι γραμμική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(x + y).$$

Επίσης

$$(\hat{x} \cdot \hat{y})(\phi) = \hat{x}(\phi) \cdot \hat{y}(\phi) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(xy) = \widehat{xy}(\phi)$$

επειδή η ϕ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) \cdot \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(xy).$$

Άρα η $\mathcal{G}$ είναι μορφισμός αλγεβρών, και

$$\mathcal{G}(\mathbf{1})(\phi) = \phi(\mathbf{1}) = 1$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

(β) Για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε από την Πρόταση 3

$$\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \{\hat{x}(\phi) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})).$$

(γ) Από το (β) έχουμε

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(\phi)| : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \rho(x) \leq \|x\|.$$

□

Περναμε τώρα σε μεταθετικές C^* αλγεβρες. Θα χρειασθει η ακολουθη Προταση:

Πρόταση 5. Αν $\mathcal{A}$ είναι C^* -αλγεβρα με μοναδα $\mathbf{1}$, καθε χαρακτηρας $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ικανοποιει

$$\phi(y^*) = \overline{\phi(y)} \quad \text{για καθε } y \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. (i) Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$ ισχύει ότι $\phi(a) \in \mathbb{R}$. Πράγματι: Έστω $\phi(a) = \lambda + i\mu$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το $b_n = a + in\mathbf{1}$ και έχουμε

$$\phi(b_n) = \phi(a) + in\phi(\mathbf{1}) = \lambda + i(\mu + n) \quad \text{αφού } \phi(\mathbf{1}) = 1.$$

Επομένως, $\lambda^2 + (\mu + n)^2 = |\phi(b_n)|^2 \leq \|b_n\|^2$ αφού $\|\phi\| = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n &\leq \|b_n\|^2 = \|b_n^* b_n\| = \|a^2 + n^2 \mathbf{1}\| \leq \|a^2\| + n^2 \\ \text{δηλαδή, } 2\mu n &\leq \|a^2\| - \lambda^2 - \mu^2. \end{aligned}$$

Η ανισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, παρά μόνον αν $\mu = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\phi(a) \in \mathbb{R}$.

(ii) Για τη γενική περίπτωση: Κάθε $y \in \mathcal{A}$ γράφεται μοναδικά $y = y_1 + iy_2$ με $y_i^* = y_i$ (όπου $y_1 = (y + y^*)/2$, $y_2 = (y - y^*)/2i$). Επειδή $y_i^* = y_i$, έχουμε $\phi(y_i) \in \mathbb{R}$ από το (i). Συνεπώς

$$\phi(y^*) = \phi(y_1 - iy_2) = \phi(y_1) - i\phi(y_2) = \overline{\phi(y_1)} + i\phi(y_2) = \overline{\phi(y)}. \quad \square$$

Παρατήρηση Στην απόδειξη της Πρότασης, οι μόνες ιδιότητες του ϕ που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι $\phi(\mathbf{1}) = 1$ και ότι $\|\phi\| = 1$. Επομένως το συμπέρασμα του ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ που έχει αυτές τις δύο ιδιότητες. Μάλιστα, είναι φανερό ότι αρκεί η ιδιότητα $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$. Παρατήρησε επίσης ότι η μεταθετικότητα της C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ δεν χρησιμοποιήθηκε.

Εφαρμογή σε γενικές C^* άλγεβρες. Στο επομένο Πορίσμα, δεν απαιτείται η μεταθετικότητα της C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$.

Πόρισμα 6. Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα και $a \in \mathcal{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζω: Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, το $\sigma(a)$ υπολογίζεται στη μοναδοποίηση. Μπορώ λοιπόν να υποθέσω ότι η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα.

Αν $\lambda \in \sigma(a)$, το στοιχείο $a - \lambda\mathbf{1}$ δεν είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, επομένως δεν είναι αντιστρέψιμο στην μεταθετική C^* -άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ που παράγει το a και η $\mathbf{1}$. Έπεται ότι υπάρχει ένας χαρακτήρας ϕ της $C^*(\mathbf{1}, a)$ με $\phi(a - \lambda\mathbf{1}) = 0$, άρα $\phi(a) = \lambda$. Αφού $a = a^*$, από την Πρόταση έχουμε ότι $\lambda = \phi(a) \in \mathbb{R}$. $\square$

Θεώρημα 7 (Gelfand-Naimark). Κάθε μεταθετική C^* -άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ όπου $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$: Ο μετασχηματισμός Gelfand:

$$\mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{M}(\mathcal{A})) : a \mapsto \hat{a}$$

(όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$) είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι ο μετασχηματισμός Gelfand είναι *-μορφισμός. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ έχουμε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5,

$$\widehat{x^*}(\phi) = \phi(x^*) = \overline{\phi(x)} = \overline{\hat{x}(\phi)}, \quad \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Επομένως η εικόνα $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{a} : a \in \mathcal{A}\}$ της $\mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγής υπάλγεβρα της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ που περιέχει την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$. Επίσης, χωρίζει τα σημεία του χώρου $\mathcal{M}(\mathcal{A})$: αν $\phi \neq \psi$ είναι χαρακτήρες, υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\hat{a}(\phi) \neq \hat{a}(\psi)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Stone-Weierstrass (δες τη διατύπωση πιο κάτω), η $\hat{\mathcal{A}}$ είναι πυκνή *-υπάλγεβρα της $(C(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$.

Όμως, έχουμε δείξει ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει η ισότητα

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \|\hat{a}\|_\infty &= \sup\{|\hat{a}(\phi)| : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} = \sup\{|\phi(a)| : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\| \end{aligned}$$

γιατί η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική, άρα η νόρμα κάθε στοιχείου της ισούται με τη φασματική του ακτίνα.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρία, οπότε η εικόνα του $\hat{\mathcal{A}}$ είναι πλήρης, άρα κλειστή στην $(C(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$. Είναι όμως και πυκνή, οπότε τελικά $\hat{\mathcal{A}} = C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$. $\square$

Υπενθύμιση: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum).

Έστω $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ με τις εξής ιδιότητες

- (1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)
- (2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$)
- (3) χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$)
- (4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$).

Τότε η $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.³

Μεταθετικές C^* -άλγεβρες χωρίς μονάδα

Παράδειγμα 8. Έστω K τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff.⁴ Μια $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ μηδενίζεται στο άπειρο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K_f^\epsilon \subseteq K$ συμπαγής ώστε $|f(t)| < \epsilon$ για κάθε $t \notin K_f^\epsilon$. Η άλγεβρα

$$C_0(K) := \{f \in C(K) : \eta \ f \text{ μηδενίζεται στο άπειρο}\}$$

με πράξεις και ενελίξη κατά σημείο και νόρμα supremum είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα. Η $C_0(K)$ έχει μονάδα αν και μονον αν ο K είναι συμπαγής.

Παρατήρησε ότι μια συνεχής $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ που μηδενίζεται στο άπειρο είναι αναγκαστικά φραγμένη, γιατί για κάθε $\epsilon > 0$ είναι φραγμένη (απο το ϵ) έξω απ το K_f^ϵ , αλλά και στο K_f^ϵ είναι φραγμένη (συνεχής σε συμπαγές).

Αν ο K είναι συμπαγής, τότε η $C_0(K)$ είναι η $C(K)$ (παρε για K_f^ϵ το $\emptyset$) κι έχει μονάδα (τη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$).

Αν παλι η $C_0(K)$ έχει μονάδα e , θα δείξω ότι ο K είναι συμπαγής. Ισχυρίζομαι πρώτα ότι $e(t) = 1$ για κάθε $t \in K$. Πραγματι, απο το Λήμμα Urysohn (Folland, Real Analysis, 4.32) για κάθε ανοιχτή περιοχή U του t υπάρχει $f : K \rightarrow [0, 1]$ συνεχής, ώστε $f(t) = 1$, και η f μηδενίζεται έξω απο κάποιο συμπαγές υποσυνολο του U , αρα ανηκει στην $C_0(K)$. Αφου η e είναι μονάδα της $C_0(K)$, εχουμε $ef = f$, αρα $e(t)f(t) = f(t)$ δηλαδη $e(t) = 1$. Δηλαδή η e είναι η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$. Επομενως το συνολο των σημειων $t \in K$ ώστε $|e(t)| < 1/2$ είναι το κενο, δηλαδή το συμπαγές $K_e^{1/2}$ του ορισμου είναι ολος ο χώρος K . Δειξαμε ότι ο K είναι συμπαγής.

Θεώρημα 9 (Gelfand - Naimark). Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, και $K = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ο χώρος των χαρακτηρων της με την ασθενη-* τοπολογία, τότε η απεικονιση Gelfand $\mathcal{G} : a \mapsto \hat{a}$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμος απο την $\mathcal{A}$ επι της $C_0(K)$.

Απόδειξη. Αν $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, η μοναδοποίηση της, $\mathcal{A}_1$ είναι μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα.

³ Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf` στην <http://eclass.uoa.gr/courses/MATH287/>.

⁴ Δηλαδή κάθε $t \in K$ έχει μια συμπαγή περιοχή: υπάρχει συμπαγές $F_t \subseteq K$ ώστε $t \in F_t^\circ$ - για παράδειγμα, ο $\mathbb{R}$.

Επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathcal{G}_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow C(K_1) : a \mapsto \hat{a}$$

είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathcal{A}_1$ επί της $C(K_1)$, όπου K_1 το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$ των χαρακτήρων της $\mathcal{A}_1$ με την ασθενή-* τοπολογία $w_{\mathcal{A}_1}^*$.

Κάθε χαρακτήρας ϕ της $\mathcal{A}$ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν χαρακτήρα $\tilde{\phi}$ της $\mathcal{A}_1$ θέτοντας

$$\tilde{\phi}(x, \lambda) := \phi(x) + \lambda.$$

Αντιστροφα κάθε χαρακτήρας της $\mathcal{A}_1$, περιοριζόμενος στην $\mathcal{A}$, ορίζει έναν χαρακτήρα της $\mathcal{A}$, εκτός από τον (μοναδικό) χαρακτήρα ψ_∞ της $\mathcal{A}_1$ που ορίζεται από την σχέση

$$\psi_\infty((a, \lambda)) = \lambda, \quad (a, \lambda) \in \mathcal{A}_1.$$

Δηλαδή αν ονομάσουμε $K_o \subseteq K_1$ το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}_1$ που δεν μηδενίζουν την $\mathcal{A}$, έχουμε

$$K_1 = K_o \cup \{\psi_\infty\} \quad \text{και} \quad K_o = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

• **Ισχυρισμός** Αν K είναι ο τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w_{\mathcal{A}}^*)$, τότε ο K είναι ομοιομορφικός με τον K_o .

Πράγματι, αν $\phi_i, \phi \in K$ τότε $\phi_i(x) \rightarrow \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ αν και μόνον αν $\tilde{\phi}_i(x, \lambda) \rightarrow \tilde{\phi}(x, \lambda)$ για κάθε $(x, \lambda) \in \mathcal{A}_1$. Άρα η απεικόνιση $\phi \rightarrow \tilde{\phi} : K \rightarrow K_o$ είναι ομοιομορφισμός.

Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{A}$ και $\phi \in K$ ισχύει $\tilde{\phi}(x, 0) = \phi(x)$. Επομένως, αν ταυτίσουμε τους χώρους K και K_o (μέσω της απεικόνισης $\phi \rightarrow \tilde{\phi}$), ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathcal{G} : x \mapsto \hat{x}$ του x (ως προς την $\mathcal{A}$) δεν είναι παρά ο περιορισμός του μετασχηματισμού Gelfand $\mathcal{G}_1 : (x, 0) \mapsto \widehat{(x, 0)}$ (ως προς την $\mathcal{A}_1$) στον K_o , δηλαδή

$$\widehat{(x, 0)}(\tilde{\phi}) = \hat{x}(\phi) \quad \text{για κάθε } \phi \in K.$$

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $\widehat{(x, 0)}$ με $x \in \mathcal{A}$ είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις $f \in C(K_1)$ με την ιδιότητα $f(\psi_\infty) = 0$. Πράγματι κάθε $f \in C(K_1)$ είναι της μορφής $f = \mathcal{G}_1(a) = \hat{a}$ για ένα (μοναδικό) $a \in \mathcal{A}_1$, και ισχύει $\hat{a}(\psi_\infty) = 0$ αν και μόνον αν $\psi_\infty(a) = 0$, δηλαδή αν και μόνον $a \in \mathcal{A}$.

- Επομένως η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρική και *-ισομορφική με την C^* -άλγεβρα $\{f \in C(K_1) : f(\psi_\infty) = 0\}$.
- Αλλά η απεικόνιση $\pi : f \rightarrow f|_{K_o}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός της $\{f \in C(K_1) : f(\psi_\infty) = 0\}$ επί της $C_o(K_o)$.

Πράγματι: αν μία $f \in C(K_1)$ μηδενίζεται στο σημείο ψ_∞ τότε (αφού είναι συνεχής στο ψ_∞) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq K_1$ του ψ_∞ ώστε $|f(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \in U$. Θέτοντας $\Omega = U^c$, που είναι συμπαγές υποσύνολο του K_o , βλέπουμε ότι $f|_{K_o} \in C_o(K_o)$ (και φυσικά $\|f\|_\infty = \|f|_{K_o}\|_\infty$).

Αντίστροφα, κάθε $g \in C_o(K_o)$ επεκτείνεται στο K_1 θέτοντας $g(\psi_\infty) = 0$. Η επέκταση είναι συνεχής στο ψ_∞ , γιατί για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon \subseteq K_o$ συμπαγές ώστε $|g(\psi)| < \varepsilon$ για κάθε $\psi \notin K_\varepsilon$ (αφού $g \in C_o(K_o)$), δηλαδή υπάρχει ανοικτή περιοχή $U = (K_\varepsilon)^c$ του ψ_∞ όπου $|g(\psi)| < \varepsilon$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η συνθεση

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{G}_1} \{f \in C(K_1) : f(\psi_\infty) = 0\} \xrightarrow{\pi} C_o(K_o)$$

είναι ισομετρικός $*$ -ισομορφισμός. Αλλά η συνθεση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από τον μετασχηματισμό Gelfand $\mathcal{G}$ της $\mathcal{A}$. Πραγματικά, αν $a \in \mathcal{A}$ έχουμε για κάθε $\phi \in K$, επειδή $\tilde{\phi} \in K_o$,

$$\mathcal{G}_1((a, 0))|_{K_o}(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}((a, 0)) = \phi(a) = \mathcal{G}(a)(\phi).$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατήρηση 10. Ο χώρος $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$ είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff.

Απόδειξη. Αφού ο χώρος αυτός είναι ομοιομορφικός με τον K_o (με την επαγόμενη από τον K_1 ασθενή- $*$ τοπολογία) αρκεί να δείξω ότι ο K_o είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Πραγματικά για κάθε $\psi \in K_o$ υπάρχουν ξένα ανοιχτά υποσυνολα U, V του K_1 ώστε $\psi \in U$ και $\psi_\infty \in V$ οπότε το $F := V^c$ είναι κλειστό υποσύνολο του K_1 , άρα συμπαγές και δεν περιέχει το ψ_∞ , άρα $F \subseteq K_o$ και αφού $\psi \in U \subseteq F$ το F είναι συμπαγής περιοχή του ψ . □

Συνοψίζοντας, έχουμε

Θεώρημα 11. Αν $\mathcal{A}$ μεταθετική C^* -άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρικός $*$ -ισομορφισμός της $\mathcal{A}$ επί της $C_o(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$. Η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ είναι w^* -συμπαγής.