Συνέχεια μορφισμών

Λήμμα 1. *Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ειναι C^* -αλγεβρες και η $\mathcal{B}$ εχει μοναδα $\mathbf{1}_B$, καθε *-μορφισμος $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ επεκτεινεται μοναδικα σε *-μορφισμο $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$ με $\phi_1((0,1)) = \mathbf{1}_B$.*

(Αποδειξη: Ασκηση)

Πρόταση 2. *Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ειναι C^* -αλγεβρες, καθε (αλγεβρικος) *-μορφισμος $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ειναι αυτοματως συνεχης, μαλιστα $\|\phi(a)\| \leqslant \|a\|$ για καθε $a \in \mathcal{A}$.*

*Επομενως καθε *-ισομορφισμος επι ειναι ισομετρια.*

Απόδειξη. Αν η $\mathcal{B}$ δεν εχει μοναδα, την εμφυτευουμε (ισομετρικα και *-ισομορφικα) στην μοναδοποιηση $\mathcal{B}_1$ και θεωρουμε την απεικονιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_1$. Απο το Λημμα, η ϕ εχει μοναδικη επεκταση σε *-μορφισμο $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$. Αν δειξουμε οτι ο ϕ_1 ειναι συστολη, το ιδιο θα ισχυει για τον περιορισμο του.

Συμπερασμα: αρκει να υποθεσουμε οτι οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ εχουν μοναδες και $\phi(\mathbf{1}_\mathcal{A}) = \mathbf{1}_\mathcal{B}$.

Εχουμε λοιπον

Παρατήρηση 3. *Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\sigma_\mathcal{B}(\phi(a)) \subseteq \sigma_\mathcal{A}(a)$.*

Απόδειξη Αν $\lambda \notin \sigma(a)$ τότε $\lambda\mathbf{1}_\mathcal{A} - a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Επομένως $\phi(\lambda\mathbf{1}_\mathcal{A} - a) \in \text{Inv}(\mathcal{B})$. [1] Αλλά $\phi(\lambda\mathbf{1}_\mathcal{A} - a) = \lambda\mathbf{1}_\mathcal{B} - \phi(a)$, άρα $\lambda\mathbf{1}_\mathcal{B} - \phi(a) \in \text{Inv}(\mathcal{B})$, οπότε $\lambda \notin \sigma(\phi(a))$. $\square$

Παρατήρηση 4. *Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\|\phi(a)\| \leqslant \|a\|$.*

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι $a = a^*$, οπότε $\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ και
$\|\phi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\phi(a))\}$. Όμως $\sigma_\mathcal{B}(\phi(a)) \subseteq \sigma_\mathcal{A}(a)$ από την Παρατήρηση 3, άρα
$\|\phi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\phi(a))\} \leqslant \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\|$.
Αν τώρα το $a \in \mathcal{A}$ είναι τυχόν, το a^*a είναι αυτοσυζυγές οπότε $\|\phi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\|$ όπως δείξαμε, και άρα

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^*\phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\| = \|a\|^2 .$$

Τελος, αν η ϕ ειναι *-ισομορφισμος επι, τοτε η ϕ και η αντίστροφή της ειναι συστολες, οποτε θα ειναι ισομετριες. $\square$

Σε μια C^* -αλγεβρα, η νορμα καθοριζεται απο την αλγεβρικη δομη:

Πρόταση 5. *Μια *-αλγεβρα $\mathcal{A}$ δεχεται το πολυ μια νορμα ως προς την οποια ειναι C^* -αλγεβρα.*

Απόδειξη. Αν η $\mathcal{A}$ είναι C^* -αλγεβρα ως προς τις νορμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$, θεωρώ

$$\phi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|') : a \to a$$

την ταυτοτική απεικόνιση. Είναι προφανώς *-ισομορφισμός και επι. Συνεπώς από την πρόταση 2 είναι ισομετρία. Δηλαδή $\|a\|' = \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. $\square$

[1] Υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ με $x(\lambda\mathbf{1} - a) = (\lambda\mathbf{1} - a)x = \mathbf{1}$, άρα $\phi(x)\phi(\lambda\mathbf{1} - a) = \phi(\lambda\mathbf{1} - a)\phi(x) = \phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.