

Συνέχεια μορφισμών

Λήμμα 1. Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C^* -αλγεβρες και η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}_B$, κάθε $*$ -μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ επεκτείνεται μοναδικά σε $*$ -μορφισμό $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ με $\phi_1((0, 1)) = \mathbf{1}_B$.

(Αποδείξη: Άσκηση)

Πρόταση 2. Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C^* -αλγεβρες, κάθε (αλγεβρικός) $*$ -μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ είναι αυτοματως συνεχής, μάλιστα $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Επομένως κάθε $*$ -ισομορφισμός επι είναι ισομετρία.

Απόδειξη. Αν η $\mathcal{B}$ δεν έχει μονάδα, την εμφυτευουμε (ισομετρικά και $*$ -ισομορφικά) στην μοναδοποίηση $\mathcal{B}_1$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_1$. Απο το Λήμμα, η ϕ έχει μοναδική επέκταση σε $*$ -μορφισμό $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1$. Αν δείξουμε ότι ο ϕ_1 είναι συστολή, το ίδιο θα ισχύει για τον περιορισμό του, την ϕ .

Συμπερασμα: αρκεί να υποθέσουμε ότι οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ έχουν μονάδες και $\phi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B$.

Εχουμε λοιπόν

Παρατήρηση 3. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$.

Απόδειξη. Αν $\lambda \notin \sigma(a)$ τότε $\lambda \mathbf{1}_A - a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$. Επομένως $\phi(\lambda \mathbf{1}_A - a) \in \text{Inv}(\mathcal{B})$.¹ Αλλά $\phi(\lambda \mathbf{1}_A - a) = \lambda \mathbf{1}_B - \phi(a)$, άρα $\lambda \mathbf{1}_B - \phi(a) \in \text{Inv}(\mathcal{B})$, οπότε $\lambda \notin \sigma(\phi(a))$. $\square$

Παρατήρηση 4. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $a = a^*$, οπότε $\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ και $\|\phi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\phi(a))\}$. Όμως $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$ από την Παρατήρηση 3, άρα $\|\phi(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(\phi(a))\} \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\|$.

Αν τώρα το $a \in \mathcal{A}$ είναι τυχόν, το a^*a είναι αυτοσυζυγές οπότε $\|\phi(a^*a)\| \leq \|a^*a\|$ όπως δείξαμε, και άρα

$$\|\phi(a)\|^2 = \|\phi(a)^* \phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\| \leq \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Τέλος, αν η ϕ είναι $*$ -ισομορφισμός επι, τότε η ϕ και η αντίστροφή της είναι συστολές, οπότε θα είναι ισομετρίες. $\square$

Σε μια C^* -αλγεβρα, η νορμα καθορίζεται απο την αλγεβρική δομή:

Πρόταση 5. Μια $*$ -αλγεβρα $\mathcal{A}$ δεχεται το πολν μια νορμα ως προς την οποία είναι C^* -αλγεβρα.

Απόδειξη. Αν η $\mathcal{A}$ είναι C^* -αλγεβρα ως προς τις νορμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$, θεωρώ

$$\phi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{A}, \|\cdot\|') : a \rightarrow a$$

την ταυτοτική απεικόνιση. Είναι προφανώς $*$ -ισομορφισμός και επι. Συνεπώς από την πρόταση 2 είναι ισομετρία. Δηλαδή $\|a\|' = \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. $\square$

¹Υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ με $x(\lambda \mathbf{1} - a) = (\lambda \mathbf{1} - a)x = \mathbf{1}$, άρα $\phi(x)\phi(\lambda \mathbf{1} - a) = \phi(\lambda \mathbf{1} - a)\phi(x) = \phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.