

Θετικές γραμμικές μορφές σε C^* αλγεβρες

Ορισμός 1. Μια γραμμική $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται θετική αν $\varphi(a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$. Λέγεται κατάσταση (state) αν $\|\varphi\| = 1$. Λέγεται πιστή (faithful) αν $\varphi(a^*a) > 0$ για κάθε $a \neq 0$.

Πρόταση 1. Αν φ είναι θετική γραμμική μορφή τότε $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : \langle a, b \rangle = \varphi(b^*a)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο, και είναι εσωτερικό γινόμενο αν-ν φ είναι πιστή. Ισχύει η ανισότητα

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b) \text{ για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathcal{A}$ τότε

$$\varphi(a^*a) = 0 \iff \varphi(b^*a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. (i) Δείχνουμε πρώτα ότι $a = a^* \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(a) \in \mathbb{R}$: Πραγματι, το a γραφεται ως διαφορά δυο θετικών στοιχείων, $a = b - c$ όπου $b, c \in \mathcal{A}$, οπότε ο $\varphi(a) = \varphi(b) - \varphi(c)$ είναι πραγματικός αφού οι $\varphi(b)$ και $\varphi(c)$ είναι μη αρνητικοί.

Τώρα, κάθε $x \in \mathcal{A}$ γραφεται $x = x_1 + ix_2$ όπου τα x_1 και x_2 είναι αυτοσυζυγή, επομένως

$$\begin{aligned} \varphi(x^*) &= \varphi(x_1 - ix_2) = \varphi(x_1) - i\varphi(x_2) \\ &= \overline{\varphi(x_1) + i\varphi(x_2)} \text{ αφού } \varphi(x_k) \in \mathbb{R} \\ &= \overline{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

(ii) Είναι φανερό ότι η απεικόνιση

$$\langle \cdot, b \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \langle a, b \rangle = \varphi(b^*a)$$

είναι γραμμική για κάθε $b \in \mathcal{A}$ και ότι η απεικόνιση

$$\langle a, \cdot \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : b \mapsto \langle a, b \rangle = \varphi(b^*a)$$

είναι αντιγραμμική για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Επίσης, για κάθε $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ έχουμε, από τη σχέση $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$,

$$\overline{\langle a, b \rangle} = \overline{\varphi(b^*a)} = \varphi(a^*b) = \langle b, a \rangle$$

και

$$\langle a, a \rangle = \varphi(a^*a) \geq 0.$$

Επομένως πραγματι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι ημιεσωτερικό γινόμενο. Είναι εσωτερικό γινόμενο αν-ν η σχέση $\langle a, a \rangle = 0$, δηλαδή η $\varphi(a^*a) = 0$, αληθεύει μόνο όταν $a = 0$, δηλ. αν-ν η φ είναι πιστή.

(iii) Για κάθε ημιεσωτερικό γινόμενο ισχύει, όπως είναι γνωστό, η ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\langle a, b \rangle|^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle$$

επομενως στην περιπτωση μας εχουμε

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b) \text{ για κάθε } a, b \in \mathcal{A}.$$

¹ Τελος, απο την ανισοτητα αυτη εχουμε την συνεπαγωγη

$$\varphi(a^*a) = 0 \Rightarrow \varphi(b^*a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}$$

και η αντιστροφη ειναι βεβαια προφανης. $\square$

Πρόταση 2. Κάθε θετική γραμμική μορφή είναι συνεχής. Όταν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα και η φ είναι θετική, $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

Απόδειξη. Όταν $1 \in \mathcal{A}$: Για καθε $a \in \mathcal{A}$ εχουμε $0 \leq a^*a \leq \|a^*a\| 1 = \|a\|^2 1$, αρα $0 \leq \varphi(a^*a) \leq \|a\|^2 \varphi(1)$. Αλλα $|\varphi(a)|^2 = |\varphi(1^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(1^*1)$, αρα $|\varphi(a)|^2 \leq \|a\|^2 \varphi(1)^2$ πραγμα που δειχνει οτι η φ ειναι φραγμενη με $\|\varphi\| \leq \varphi(1)$, αλλα $\varphi(1) \leq \|\varphi\| \|1\| = \|\varphi\|$, οποτε ισχυει ισοτητα.

Για τη γενικη περιπτωση: Δειχνουμε πρωτα οτι η φ ειναι συνεχης στον θετικο κωνο $\mathcal{A}_+$.

Αν οχι, υπαρχει μια ακολουθια (a_n) θετικων στοιχειων νορμας 1 στην $\mathcal{A}$ ωστε $\varphi(a_n) \geq 2^n$ για καθε n . Παρτηρουμε ομως οτι η σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_k$ συγκλινει απολυτα, αρα συγκλινει (πληροτητα

της $\mathcal{A}$). Επειδη για καθε $n \in \mathbb{N}$ η σειρα $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} a_k$ συγκλινει σε θετικο

στοιχειο, εχουμε $\varphi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_k\right) \geq 0$, δηλαδη $\varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varphi(a_k)$. Δηλαδη $\varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} a_k\right) \geq$

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} 2^k = n$ για καθε n , αποπο.

Αν τωρα (b_n) ειναι μια ακολουθια αυτοσυζυγων στοιχειων στην $\mathcal{A}$ και $\|b_n\| \rightarrow 0$, τοτε εχουμε $\|b_n^+\| \leq \|b_n\|$ απο τον συναρτησιακο λογισμο (αφου το θετικο μερος f^+ μιας συνεχους πραγματικης συναρτησης f ικανοποιει $\|f^+\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$) ² και ομοιως για το αρνητικο μερος, επομενως $\varphi(b_n) = \varphi(b_n^+) - \varphi(b_n^-) \rightarrow 0$.

Δειξαμε οτι η φ ειναι συνεχης στον χωρο των αυτοσυζυγων στοιχειων της $\mathcal{A}$. Αφου καθε $a \in \mathcal{A}$ ειναι γραμμικος συνδυασμος δυο αυτοσυζυγων στοιχειων, επεται οτι η φ ειναι συνεχης στην $\mathcal{A}$. $\square$

Παραδείγματα 3. (Καταστασεις)

1. Στην $\mathcal{B}(H)$,

(α') η $\varphi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ (όπου $\xi \in H$ νόρμας 1)

(β') η $\psi(T) = \sum_i \lambda_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle$ όπου $\|\xi_i\| = 1$, $\lambda_i \geq 0$ και $\sum \lambda_i = 1$.

¹Εχουμε $\varphi((\lambda a + b)^*(\lambda a + b)) \geq 0$ για καθε $a, b \in \mathcal{A}$ και καθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Θετοντας $\lambda = t\varphi(a^*b)$ όπου $t \in \mathbb{R}$ επεται οτι $t^2|\varphi(b^*a)|^2\varphi(a^*a) + 2t|\varphi(b^*a)|^2 + \varphi(b^*b) \geq 0$ για καθε $t \in \mathbb{R}$, οποτε $|\varphi(b^*a)|^4 \leq |\varphi(b^*a)|^2\varphi(a^*a)\varphi(b^*b)$.

²ή απο τον τυπο $2b_n^+ = |b_n| + b_n$

2. Στην $C(K)$,

$$(\alpha') \quad n \quad \varphi(f) = f(t_0) \quad \text{όπου } t_0 \in K$$

$$(\beta') \quad n \quad \varphi(f) = \int f d\mu \quad \text{όπου } \mu \text{ μέτρο πιθανότητας.}$$

3. Σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$, αν $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση και $\xi \in H$ νόρμας 1, n
 $\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Αντίστροφο του τελευταίου είναι η κατασκευή GNS, που θα δούμε στο επομενο:

Κάθε κατάσταση σε μια C^* άλγεβρα ορίζει μια αναπαράσταση.

Πρόταση 4. Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μοναδα 1. Μια γραμμική μορφή $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετική αν-ν $\varphi(1) = \|\varphi\|$.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δειξει ότι αν η φ είναι θετική, τότε $\varphi(1) = \|\varphi\|$.

Για το αντίστροφο, μπορούμε να υποθεσουμε ότι $\varphi(1) = \|\varphi\| = 1$. Επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα της Πρότασης 5 στο `metath25.pdf`:

(i) Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$ ισχύει ότι $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Πράγματι: Έστω $\varphi(a) = \lambda + i\mu$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, θεωρούμε το $b_n = a + in1$ και έχουμε

$$\varphi(b_n) = \varphi(a) + in\varphi(1) = \lambda + i(\mu + n) \quad \text{αφού } \varphi(1) = 1.$$

Επομένως, $\lambda^2 + (\mu + n)^2 = |\varphi(b_n)|^2 \leq \|b_n\|^2$ αφού $\|\varphi\| = 1$.

$$\text{Άρα } \lambda^2 + \mu^2 + n^2 + 2\mu n \leq \|b_n\|^2 = \|b_n^* b_n\| = \|a^2 + n^2 1\| \leq \|a^2\| + n^2$$

$$\text{δηλαδή, } 2\mu n \leq \|a^2\| - \lambda^2 - \mu^2.$$

Η ανισότητα αυτή δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, παρά μόνον αν $\mu = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

(ii) Δείχνουμε τώρα ότι αν $a \in \mathcal{A}_+$ τότε $\varphi(a) \geq 0$. Μπορούμε να υποθεσουμε ότι $\|a\| = 1$. Τότε $0 \leq a \leq 1$, άρα $0 \leq 1 - a \leq 1$, επομένως $\|1 - a\| \leq \|\varphi\| = 1$. Έχουμε λοιπόν $|\varphi(1 - a)| \leq 1$, επομένως $-1 \leq \varphi(1 - a) \leq 1$ εφόσον $\varphi(1 - a) \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $1 - \varphi(a) = \varphi(1 - a) \leq 1$, άρα $\varphi(a) \geq 0$, όπως θέλαμε. $\square$

Πρόταση 5. Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ υπάρχει κατάσταση φ της $\mathcal{A}$ ώστε

$$\varphi(a^* a) = \|a\|^2.$$

Απόδειξη. (Εναλλακτική των διαφανειών) Θετούμε $b := a^* a$. Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathcal{C} := C^*(1, b)$ είναι ισομετρικά ισομορφή με την $C(K)$, όπου $K (= \mathcal{M}(\mathcal{C}))$ ο χώρος των χαρακτηριστικών της, μέσω της απεικόνισης Gelfand $x \mapsto \hat{x}$. Όπως έχουμε δειξει,

$$\|b\| = \|\hat{b}\|_\infty = \sup\{|\hat{b}(\psi)| : \psi \in K\} = \sup\{|\psi(b)| : \psi \in K\}.$$

Συνεπώς υπάρχει $\psi \in K$, δηλαδή χαρακτηρισ $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $|\psi(b)| = \|b\|$.

Επεκτείνουμε τώρα (Θεώρημα Hahn Banach!) την ψ σε μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Αφού $\|\psi\| = \psi(1) = 1$ (η ψ είναι χαρακτηρισ), έχουμε $\|\varphi\| = \varphi(1) = 1$, οπότε από την προηγούμενη πρόταση η φ είναι κατάσταση. Και έχουμε $\varphi(a^* a) = \varphi(b) = \|a^* a\|$, όπως θέλαμε. $\square$