Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Α. Κατάβολος

Εαρινό Εξάμηνο 2022-23

Χωροι Banach

πχ

$$\ell_n^\infty(\mathbb{C}) \ni \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

νορμα:

$$\|\vec{x}\|_\infty := \sup_i |x_i|$$

Χωροι Τελεστων

πχ

$$M_n(\mathbb{C}) \ni x = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

νορμα:

$$\begin{aligned} \|[x_{ij}]\| &:= \sup\{\|x\xi\|_2 : \xi \in \mathrm{ball}(\ell^2([n]))\} \\ &= \sup\{\left|\sum a_i x_{ij} b_j\right| : \sum |a_i|^2 = \sum |b_j|^2 = 1\} \end{aligned}$$

Υπενθυμιση

- $(E, \|\cdot\|)$ χωρος με νορμα: $\quad \|\cdot\| : E \to \mathbb{K}$

(N1) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)
για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Επαγει μετρικη. Αν $(E, \|\cdot\|)$ ειναι χωρος με νορμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

- Χωρος Banach: $(E, \|\cdot\|)$ πληρης ως προς την επαγομενη μετρικη.

Πρδγ.
$\ell^\infty_\Gamma = \ell^\infty_\Gamma(\mathbb{C}) := \{x : \Gamma \to \mathbb{C} \text{ φργμ.}\}$, $\|x\|_\infty := \sup\{|x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$.

- Ο δυικος ενος χωρου με νορμα $(E, \|\cdot\|_E)$ ειναι παντα χωρος Banach με τη νορμα τελεστη:

$$E^* := \{f : E \to \mathbb{K} : \text{γραμμικη και συνεχης}\}$$

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in \text{ball}(E)\}$$

Καθε χωρος με νορμα «ειναι» χωρος συναρτησεων

Πρόταση

Αν $(E, \|\cdot\|)$ *ειναι χωρος με νορμα, υπαρχει συνολο* Γ *και γραμμικη* *ισομετρια* $\phi : E \to \ell^\infty_\Gamma$.

Οχι μοναδικα!

Άσκηση

Για τον $E = \ell^1_n(\mathbb{R})$ *βρειτε καταλληλη* $\phi : E \to \ell^\infty_\Gamma$. *Επιλεξτε «μικρο»* Γ. *Ιδια ερωτηση για τον* $E = \ell^1_n(\mathbb{C})$. *Συγκρινετε τα συνολα* Γ *στις δυο περιπτωσεις.*

Υπενθυμιση

- Εσωτερικο γινομενο: $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ με

$$\begin{array}{ll} (i) & (x_1 + \lambda x_2, y) = (x_1, y) + \lambda (x_2, y) \\ (ii) & \overline{(x,y)} = (y,x) \\ (iii) & (x,x) \geq 0 \\ (iv) & (x,x) = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για καθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Επαγει νορμα: $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ (Cauchy-Schwarz)!

- Χωρος Hilbert: $(E, (\cdot,\cdot))$ και πληρης ως προς τη μετρικη που επαγει το $(\cdot,\cdot)$.

Το ευθυ αθροισμα $\bigoplus_{k=1}^n E_k$ χωρων με εσωτ. γινομενο $(E_k, (\cdot,\cdot)_k)$ εφοδιαζεται με πραξεις κατα συνεταγμενη και

$$(\vec{x}, \vec{y}) := \sum_{k=1}^n (x_k, y_k)_k \quad \text{αρα} \quad \|\vec{x}\| := \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^2 \right)^{1/2}.$$

$M_n(\mathcal{B}(H)) \simeq \mathcal{B}(H^n))$

Καθε $n \times n$ πινακας $A = [a_{ij}]$ τελεστων $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ οριζει φραγμενο (Ασκηση) τελεστη στον H^n (οπου $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$) μεσω πολλ/σμου πινακων:

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(\xi_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}(\xi_j) \end{bmatrix}.$$

Ετσι επαγεται νορμα στον χωρο $M_n(\mathcal{B}(H))$

$$\|A\| = \sup\{\|A\vec{\xi}\| : \vec{\xi} \in \operatorname{ball} H^n\}.$$

Ειδικοτερα επαγεται νορμα στον $M_n(\mathbb{C})$.
Αντιστροφα καθε $A \in \mathcal{B}(H^n))$ επαγει εναν $n \times n$ πινακα $[a_{ij}]$ τελεστων $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ (Ασκηση).

Αλγεβρικη δομη του $M_n(\mathrm{E})$

Αν E ειναι $\mathbb{K}$-γραμμικος χωρος, τοτε για καθε $n \in \mathbb{N}$ ο χωρος $M_n(\mathrm{E})$ ειναι οχι μονον $\mathbb{K}$-γραμμικος χωρος, δηλ. $\mathbb{K}$-προτυπο (πραξεις κατα συντεταγμενη) αλλα και $M_n(\mathbb{K})$-διπροτυπο με πραξεις

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathrm{E}) \to M_n(\mathrm{E}) &: (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \\ \text{οπου } \alpha \cdot x = [y_{ij}] &\ \text{ με } \ y_{ij} := \sum_k \alpha_{ik} x_{kj} \\ M_n(E) \times M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathrm{E}) &: (x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha \\ \text{οπου } x \cdot \alpha = [z_{ij}] &\ \text{ με } \ z_{ij} := \sum_k x_{ik} \alpha_{kj} \,. \end{aligned}$$

Ένας χώρος τελεστών $\mathcal{X}$ (Quantized or non-commutative Banach space) ειναι ενας (συνηθως κλειστος) υπόχωρος του χώρου $\mathcal{B}(H)$ των γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε κάποιον (μιγαδικό) χώρο Hilbert H
(συχνά πεπερασμένης διάστασης, οπότε $H \simeq \ell_n^2 := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$).

Ο $\mathcal{X}$ κληρονομεί από τον $\mathcal{B}(H)$ τη νόρμα $\|\cdot\|$:
$\|a\| := \sup\{\|a\xi\|_H : \|\xi\|_H \le 1\}$.

Κάθε $n \times n$ πίνακας τελεστών στον H είναι επίσης τελεστής (στον H^n).
(Αν $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ τότε δρα στον H^n με πολλ/σμό πινάκων:
$[a_{ij}][\xi_j] = [\sum_k a_{ik}\xi_k]$.)

Συνεπώς κάθε $M_n(\mathcal{X})$ κληρονομεί τη νόρμα $\|\cdot\|_n$ του $\mathcal{B}(H^n)$.
Δηλαδή, εκτός απ' τον $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, έχουμε και την οικογένεια
$\{(M_n(\mathcal{X}), \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N}\}$.

Δομη χωρου τελεστων στον $M_n(\mathrm{E})$

Αν $E \subseteq \mathcal{B}(H)$ ειναι χωρος τελεστων, τοτε για καθε $n \in \mathbb{N}$ ο χωρος $M_n(\mathrm{E})$ ειναι χωρος τελεστων: $M_n(E) \subseteq \mathcal{B}(H^n)$ με νορμα

$$\|[x_{ij}]\|_n := \sup\{\|[x_{ij}]\vec{\xi}\|_{H^n} : \|\vec{\xi}\|_{H^n} = 1\}.$$

Άσκηση

(R1) Αν $\alpha, \beta \in M_n$ *και* $x \in M_n(E)$ *τοτε*

$$\|\alpha \cdot x \cdot \beta\|_n \leq \|\alpha\| \, \|x\|_n \, \|\beta\|$$

(οπου $\|\cdot\|$ *η νορμα του* M_n *και* $\|\cdot\|_n$ *η νορμα του* $M_n(E)$*).*

(R2) Αν $x \in M_n(E)$ *και* $y \in M_m(E)$ *τοτε ο* $x \oplus y := \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M_{n+m}(E)$ *ικανοποιει*

$$\|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\}.$$

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών επάγει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια απεικόνιση
$\Phi_n : M_n(\mathcal{X}) \to M_n(\mathcal{Y}) : [x_{ij}] \to [\Phi(x_{ij})]$.

Η Φ λέγεται πλήρως φραγμένη (completely bounded) αν
$\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi_n\| < \infty$.

Σημ: $\|\Phi_n\| = \sup\{\left\|[\Phi(x_{ij})]\right\|_n : x_{ij} \in \mathcal{X}, \left\|[x_{ij}]\right\|_n \leq 1\}$.

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Παρατηρηση Η $\Phi : M_2 \to M_2 : a = a^\dagger$ (ανάστροφος) ειναι ισομετρια στον $E = M_2$. Όμως, ενώ το

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

εχει νορμα 1 στον $M_2(M_2) \simeq M_4$ [Ασκηση!], το

$$\Phi_2(A) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν έχει νορμα 1. [Ασκηση!] Συνεπως $\|\Phi_2\| > 1 = \|\Phi\|$.

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$, που έχει τις ιδιότητες:
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.
(β) $a^{**} = a$.
(γ) $(ab)^* = b^* a^*$.
για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \to A^*$ στον $\mathcal{B}(H)$
όπου $(A^* y, x) = (y, Ax)$ για κάθε $x, y \in H$.

Επίσης, η $f \to f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $t \in K$
(όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff – πχ. μετρικός).

C*-άλγεβρες

Ορισμός

Άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ που είναι και άλγεβρα με την ιδιότητα $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.

Ορισμός

C*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 .$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$-κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα αν [1] είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

[1] ΘΝΞ, Χ-Α!

Στοχος: Θεωρια Gelfand

Θα δειξουμε:

• Θεωρημα Καθε μεταθετικη C*-άλγεβρα με μοναδα «είναι» (ισομ. *-ισομ.) της μορφης $C(K)$ για καποιο μοναδικο συμπαγη χώρο Hausdorff K.

• Θεωρημα Καθε C*-άλγεβρα αναπαρισταται ως κλειστη *-υπαλγεβρα του χωρου $\mathcal{B}(H)$ για καποιον (οχι μοναδικο) χωρο Hilbert H.

Προχειρα Παραδειγματα

Αλγεβρες: Με πολλ/σμο κατα σημειο οι $\ell^\infty, c_0, \ell^1, C(K)$ αλλα οχι ο $L^1([0,1])$ (πχ η $f(t) = t^{-1/2}$ για $t \neq 0$ ανηκει στον $L^1([0,1])$ αλλα η f^2 οχι).

Αλγεβρα με πολλ/σμο πινακων (μη μεταθετικη): η $M_n(\mathbb{C})$ για $n > 1$.
Γενικευση: η $\mathcal{B}(E)$ με πολλ/σμο τη συνθεση απεικονισεων (οπου E χωρος με νορμα).

Αλγεβρες Banach (απαιτειται επιπλεον να ειναι χωρος Banach *και* $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$): Οι ℓ^∞ και c_0 και $C(K)$ με τη νορμα $\|\cdot\|_\infty$, ο $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
Η $\mathcal{B}(E)$ ειναι αλγεβρα Banach οταν ο E ειναι χωρος Banach.

C* Αλγεβρες (απαιτειται επιπλεον και η υπαρξη ενελιξης που να ικανοποιει την ιδιοτητα C*: $\|a^*a\| = \|a\|^2$): Οι ℓ^∞ και c_0 και $C(K)$ ειναι C* αλγεβρες με $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Ομως ο $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ με τις πραξεις που κληρονομει απ τον ℓ^∞ δεν ειναι C* αλγεβρα, ουτε ο $(\ell^1_2, \|\cdot\|_1)$.
Η $\mathcal{B}(H)$ ειναι C* αλγεβρα οταν ο H ειναι χωρος Hilbert, οποτε η ενελιξη οριζεται μεσω της δρασης στον H οπως ειδαμε.

Αντιστρεψιμα στοιχεια

Εστω Αν $\mathcal{A}$ μια αλγεβρα Banach με μοναδα 1.

Ορισμός

Ενα $a \in \mathcal{A}$ λεγεται αντιστρεψιμο (invertible) αν υπαρχει $b \in \mathcal{A}$ ωστε $ab = 1$ και $ba = 1$. Το στοιχειο αυτο ειναι μοναδικο, αν υπαρχει, και συμβολιζεται a^{-1}.
Το συνολο των αντιστρεψιμων στοιχειων της $\mathcal{A}$ συμβολιζεται $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ ή $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$.

Πρόταση

(i) Αν $\|1-a\| < 1$ τοτε το a ειναι αντιστρεψιμο και μαλιστα

$$a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-a)^k \,.$$

(ii) Το $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ ειναι ανοικτο υποσυνολο της $\mathcal{A}$ και η απεικονιση $a \mapsto a^{-1}$ ειναι συνεχης στο $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ (αρα ομοιομορφισμος).

Το Φασμα ενος στοιχειου

Ορισμός

Εστω Αν $\mathcal{A}$ μια αλγεβρα Banach με μοναδα 1 και $a \in \mathcal{A}$. Το φασμα $\sigma(a)$ του a ειναι το συνολο μιγαδικων αριθμων λ για τους οποιους το $\lambda 1 - a \in \mathcal{A}$ δεν εχει αντιστροφο στην $\mathcal{A}$:

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin \operatorname{Inv} \mathcal{A}\}.$$

Θεώρημα

Το φασμα $\sigma(a)$ καθε στοιχειου $a \in \mathcal{A}$ ειναι συμπαγες και μη κενο (!) υποσυνολο του $\mathbb{C}$.

(Αποδειξεις στο spban23.pdf.)

Η φασματικη ακτινα ενος στοιχειου

Η *φασματικη ακτινα (spectral radius)* $\rho(a)$ οριζεται ως εξης:

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Εχουμε $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά οχι ισοτητα εν γενει (π.χ. οταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα (Gelfand-Beurling)

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα

Αν $\mathcal{A}$ ειναι C^* -αλγεβρα με μοναδα και $a \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγες ($a^* = a$) ή γενικοτερα φυσιολογικο (δηλ. $a^*a = aa^*$) τοτε $\rho(a) = a$.

(Αποδειξη στο gelbe.pdf.)

Η μοναδοποιηση μιας C* αλγεβρας

Αν $\mathcal{A}$ ειναι αλγεβρα, οριζουμε $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Ο χωρος $\mathcal{A}_1$ γινεται αλγεβρα αν ορισουμε

$$(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu) \quad x,y \in \mathcal{A},\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}.$$

Η $\mathcal{A}_1$ εχει μοναδα το στοιχειο $(0,1)$.

Ορισμός

Αν $\mathcal{A}$ ειναι αλγεβρα χωρις μοναδα και $a \in \mathcal{A}$, το φασμα του a ειναι το φασμα του $(a,0)$ στη μοναδοποιηση $\mathcal{A}_1$ της $\mathcal{A}$:

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (a,0) - \lambda(0,1) \notin \mathrm{Inv}\,\mathcal{A}_1\}.$$

(Δηλαδη $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a,-\lambda) \notin \mathrm{Inv}\,\mathcal{A}_1\}$.)

Η μοναδοποιηση μιας C* αλγεβρας

Πρόταση

Εστω $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *μια* C^* *-αλγεβρα χωρις μοναδα. Θετω*

$$(x,\lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x,\lambda) \in \mathcal{A}_1)\,.$$

και

$$\|(x,\lambda)\|_\pi := \sup\{\|xy+\lambda y\| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \le 1\}\,.$$

Η $(\mathcal{A}_1, \|\cdot\|_\pi)$ *ειναι* C^* *-αλγεβρα με μοναδα που περιεχει την* $\mathcal{A}$ *ως μεγιστικο ιδεωδες.*

Παράδειγμα

Αν $\mathcal{A} = c_0(\mathbb{N})$, τοτε $\mathcal{A}_1 = c(\mathbb{N})$ (οι συγκλινουσες ακολουθιες).

(Αποδειξεις στο unitiz.pdf.)

Συνεχεια μορφισμων, μοναδικοτητα της νορμας

Λήμμα

*Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ειναι C^* -αλγεβρες και η $\mathcal{B}$ εχει μοναδα 1_B, καθε *-μορφισμος $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ επεκτεινεται μοναδικα σε *-μορφισμο $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$ με $\phi_1((0,1)) = 1_B$.*

(Αποδειξη: Ασκηση)

Πρόταση

*Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ειναι C^* -αλγεβρες, καθε (αλγεβρικος) *-μορφισμος $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ειναι αυτοματως συνεχης, μαλιστα $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ για καθε $a \in \mathcal{A}$.*
*Επομενως καθε *-ισομορφισμος επι ειναι ισομετρια.*

Σε μια C^* -αλγεβρα, η νορμα καθοριζεται απο την αλγεβρικη δομη:

Πρόταση

*Μια *-αλγεβρα $\mathcal{A}$ δεχεται το πολυ μια νορμα ως προς την οποια ειναι C^* -αλγεβρα.*

Παράδειγμα

Εστω K συμπαγης χωρος Hausdorff (πχ μετρικος χωρος).

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : \text{συνεχης}\}.$$

Με πραξεις και ενελιξη κατα σημειο, και τη νορμα supremum, η $C(K)$ ειναι μεταθετικη C* -αλγεβρα με μοναδα τη σταθερη συναρτηση.

Το πρωτο Θεωρημα Gelfand-Naimark λεει ότι «δεν υπαρχουν αλλες»:

*Καθε μεταθετικη C^*-άλγεβρα με μοναδα «είναι» (ισομ. *- ισομ.) της μορφης $C(K)$ για καποιο (μοναδικο) συμπαγη χώρο Hausdorff K.*

Χαρακτηρες

Ορισμός

Χαρακτήρας ή *πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή* σε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται ένας *μη μηδενικός* μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Δηλαδη η ϕ ικανοποιει

$$\phi(a + \lambda b) = \phi(a) + \lambda\phi(b), \;\; \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

για καθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.

Το συνολο των χαρακτηρων μιας C* αλγεβρας μπορει να ειναι το κενο (παραδειγμα η $M_2(\mathbb{C})$). Θα δειξουμε ομως οτι οι *μεταθετικες* C^* *-αλγεβρες* εχουν παντα «αρκετους» χαρακτηρες.

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach ***με μονάδα****.*
Αν $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, τοτε $\phi(a) \in \sigma(a)$, αρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.
Συνεπως $\|\phi\| = 1$ (αφου $\phi(\mathbf{1}) = 1$).

Χαρακτηρες

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach ***με μονάδα****. Το σύνολο $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή-* τοπολογία, δηλαδή την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.*

Παρατήρηση Η ύπαρξη μονάδας στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο χώρος των χαρακτήρων της $c_o(\mathbb{N})$ δεν είναι συμπαγής (άσκηση).

Ορισμός

Εστω $\mathcal{A}$ αλγεβρα Banach με μονάδα. Για καθε $a \in \mathcal{A}$, ονομαζουμε $\hat{a}$ την συναρτηση

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a).$$

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετικη αλγεβρα Banach με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Η $\hat{a}$ ειναι συνεχης συναρτηση που απεικονιζει τον $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ επι του $\sigma(a)$.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\hat{x} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(x).$$

Θεώρημα (Gelfand Naimark I)

Εστω $\mathcal{A}$ μεταθετικη αλγεβρα Banach με μονάδα. Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*) : x \mapsto \hat{x}$$

(α) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

(β) Ικανοποιεί $\hat{x}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

(γ) Είναι συνεχής, μάλιστα

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|.$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

Μεταθετικες C*-αλγεβρες

Πρόταση

Αν $\mathcal{A}$ ειναι C-αλγεβρα με μοναδα 1, καθε χαρακτηρας $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ικανοποιει*

$$\phi(a^*) = \overline{\phi(a)} \quad \text{για καθε } a \in \mathcal{A}\,.$$

Στο επομενο Πορισμα, δεν απαιτειται η μεταθετικοτητα της C* αλγεβρας $\mathcal{A}$.

Πόρισμα

Εστω $\mathcal{A}$ μια C άλγεβρα και $a \in \mathcal{A}$.*

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}\,.$$

(Υπενθυμιση: Αν η $\mathcal{A}$ δεν εχει μοναδα, το $\sigma(a)$ υπολογιζεται στη μοναδοποιηση.)

Μεταθετικες C*-αλγεβρες

Θεώρημα (Gelfand Naimark I)

Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική C-άλγεβρα με μονάδα. Ο μετασχηματισμός Gelfand*

$$\mathcal{G} : x \to \hat{x} : \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$$

*είναι ισομετρικός *- μορφισμός (δηλ. διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη) από την $\mathcal{A}$ επί της $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}), w^*)$ και ικανοποιεί $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.*

Θεώρημα (Gelfand - Naimark)

Αν $\mathcal{A}$ ειναι μεταθετικη C^*-άλγεβρα χωρις μοναδα, και $K = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ο χωρος των χαρακτηρων της με την ασθενη- τοπολογια, τοτε η απεικονιση Gelfand $\mathcal{G} : a \mapsto \hat{a}$ είναι ισομετρικος *-ισομορφισμος απο την $\mathcal{A}$ επι της $C_0(K)$.*

(Αποδειξεις στο metath23.pdf.)

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Αποδείξεις στο αρχείο spdep23.pdf.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός)

*Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $a \in \mathcal{A}$. Υπάρχει *-μορφισμός*

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$$

με $\omega_c(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ και $\omega_c(\mathrm{id}) = a$ αν και μόνον αν $a^*a = aa^*$. Η απεικόνιση ω_c (αν υπάρχει) είναι μοναδική και ισομετρική, και το σύνολο τιμών της είναι ακριβώς η C^*-υπάλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από το a και την $\mathbf{1}$.

Συμβολισμός: Γράφουμε συνήθως $f(a)$ αντί για $\omega_c(f)$.

Ορισμός

Έστω $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Η απεικόνιση

$$\omega_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A} : f \mapsto f(a)$$

ονομάζεται συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus).

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα.

Λήμμα

Έστω $\mathcal{A}$ *μια* C^* *άλγεβρα με μονάδα* $\mathbf{1}$ *και* $a \in \mathcal{A}$ *με* $a^*a = aa^*$. *Αν* $\mathcal{C} = C^*(\mathbf{1}, a)$ *είναι η* C^**-υπάλγεβρα της* $\mathcal{A}$ *που παράγεται από το* a *και την* $\mathbf{1}$, *τότε ο χώρος* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ *των χαρακτήρων της* $\mathcal{C}$ *είναι ομοιομορφικός με το φάσμα* $\sigma(a)$ *του* a *μέσω της απεικόνισης*

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(a) .$$

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A}$ *μια C* άλγεβρα με μονάδα και* $a \in \mathcal{A}$ *φυσιολογικό. Το σύνολο*

$$\{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της* $\mathcal{A}$ *που περιέχει την μονάδα και το* a *και συμβολίζεται* $C^*(\mathbf{1}, a)$. *Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων των* a *και* a^*.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα (Φασματικής απεικόνισης - Spectral mapping theorem)

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα χωρίς μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$, από τον συναρτησιακό λογισμό ορίζεται το $f(a) \in \mathcal{A}^\sim$. Το $f(a)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (ακριβέστερα, στην εικόνα της $\mathcal{A}$ μέσα στην $\mathcal{A}^\sim$) αν-ν η συνάρτηση f μηδενίζεται στο $0 \in \sigma(a)$.

Αποδείξεις στο αρχείο funcalc23met.pdf.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται θετικό (γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$.
Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παρατηρηση Η συνθηκη $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ *δεν* συνεπαγεται παντα $a = a^*$:
Παραδειγμα το $a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ στην $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$.

Παραδείγματα - Ασκήσεις

• Στον $C(K)$: $f \geq 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).
• Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $(T\xi, \xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
• Στην $\mathcal{B}(H)$ (H *μιγαδικος* χωρος Hilbert): $T \geq 0$ ανν $(T\xi, \xi) \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος*:*

$$a, b \in \mathcal{A}_+,\ \lambda \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Λήμμα

Αν $x = x^*$ και $\|x\| \leq \mu$, τότε $-\mu 1 \leq x \leq \mu 1$

$$\text{και} \quad x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - \mu 1\| \leq \mu\,.$$

Πόρισμα

$$\mathcal{A}_+ = \{x \in \mathcal{A} : x = x^* \ \text{και}\ \|\|x\|1 - x\| \leq \|x\|\}\,.$$

Πρόταση

Ο κώνος $\mathcal{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή

$$\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$,

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathcal{A}_+ \text{ ώστε } \; a = b^2 .$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ (με μονάδα) γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathcal{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(1, a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$.
Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*$, $b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Θεώρημα

Σε μια C άλγεβρα $\mathcal{A}$, ένα στοιχείο είναι θετικό ανν είναι της μορφής a^*a.*

Αποδείξεις στο αρχείο cone.pdf.

Θετικές γραμμικές μορφές

Ορισμός

Μια γραμμική $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται θετική αν $\phi(a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$. Λέγεται κατάσταση (state) αν $\|\phi\| = 1$. Λέγεται πιστή (faithful) αν $\phi(a^*a) > 0$ για κάθε $a \neq 0$.

Πρόταση

Αν ϕ είναι θετική γραμμική μορφή τότε $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Η απεικόνιση $(\cdot,\cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C} : (a,b) = \phi(b^*a)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο, και είναι εσωτερικό γινόμενο αν-ν η ϕ είναι πιστή. Ισχύει η ανισότητα

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b) \;\; \textit{για κάθε} \;\; a,b \in \mathcal{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathcal{A}$ τότε

$$\phi(a^*a) = 0 \iff \phi(b^*a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathcal{A}.$$

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή είναι συνεχής. Όταν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα και η ϕ είναι θετική, $\|\phi\| = \phi(1)$.

Απόδειξη (όταν $1 \in \mathcal{A}$)

$0 \leq a^*a \leq \|a^*a\| 1 = \|a\|^2 1 \Rightarrow 0 \leq \phi(a^*a) \leq \|a\|^2 \phi(1)$. Αλλά $|\phi(a)|^2 = |\phi(1^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(1^*1)$ άρα $|\phi(a)|^2 \leq \|a\|^2 \phi(1)^2$.

Θετικές γραμμικές μορφές

Παραδείγματα

1. Στην $\mathcal{B}(H)$, (i) η $\phi(T) = (T\xi, \xi)$ (όπου $\xi \in H$ νόρμας 1)
2. (ii) η $\psi(T) = \sum_i (T\xi_i, \xi_i)$ όπου $\sum \|\xi_i\|^2 = 1$.
3. Στην $C(K)$, (i) η $\phi(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$
4. (ii) η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.
5. Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$, αν $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση και $\xi \in H$ νόρμας 1, η $\phi(a) = (\pi(a)\xi, \xi)$.

Αντίστροφο του (5) ειναι η κατασκευη GNS

Κάθε κατάσταση σε μια C* άλγεβρα ορίζει μια αναπαράσταση (δες το Θεωρημα 50 σε λιγο).

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μοναδα 1. Μια γραμμικη μορφη $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ειναι θετικη αν-ν $\phi(1) = \|\phi\|$.

Πρόταση

Εστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα. Για καθε $a \in \mathcal{A}$ υπαρχει κατασταση ϕ της $\mathcal{A}$ ωστε

$$\phi(a^*a) = \|a\|^2 .$$

Απόδειξη Αν $b := a^*a$ και $\lambda_0 := \max \sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\psi : C^*(1, b) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \psi(f(b)) = f(\lambda_0) \quad (f \in C(\sigma(b))$$

και επεκτείνω το ψ σε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ (αφου $\|\psi\| = \psi(1) = 1$), οπότε $\phi(a^*a) = \psi(b) = \lambda_0 = \|a^*a\|$.

Intermezzo: Διαγωνιοι τελεστες στον χωρο $\ell^2(\Gamma)$

- Διαγωνιοι τελεστες Αν $a = (a_n),\ \ a_n \in \mathbb{C}$ είναι φραγμενη ακολουθία, η απεικονιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ οριζει φραγμενο τελεστη $D_a : \ell^2 \to \ell^2$ με νορμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Εχουμε $D_a e_k = a_k e_k$.
- Αν Γ τυχόν με κενό σύνολο (πχ. $\Gamma = [0,1]$) ορίζω

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \Gamma \to \mathbb{C} : \exists M : \forall F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ. } \sum_{t\in F} |x(t)|^2 \le M^2\}$$

Με $\|x\|_2 := \inf\{M : \sum_{t\in F} |x(t)|^2 \le M^2 \ \forall F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ. }\}$ γίνεται χώρος Hilbert με ο.κ. βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$ (οπου $\delta_t(s) = 1$ αν $s = t$ και $\delta_t(s) = 0$ αλλιως).
Κάθε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$, όπως για το $\mathbb{N}$.

Intermezzo II: Αναπαραστάσεις της $C([0,1])$: Παραδείγματα

• π_1 στον χώρο $\ell^2(\Gamma)$ όπου $\Gamma = [0,1]$: Για καθε $f \in C([0,1])$, ορίζουμε $\pi_1(f) \in \mathcal{B}(\ell^2([0,1]))$ από τη σχέση $\pi_1(f) = D_f$ δηλ. $(\pi_1(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in \ell^2([0,1])$ και $t \in [0,1]$.

Το ιδιο για την $C(\Gamma)$ οπου Γ συμπαγης χωρος Hasudorff, αρα για οποιαδηποτε μεταθετικη C* αλγεβρας $\mathcal{A}$ με μοναδα, οπου Γ το συνολο των χαρακτηρων της $\mathcal{A}$.

• π_2 στον $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$: ίδιος τύπος $\pi_2(f) = D_f$, αλλά ο $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$ είναι διαχωρίσιμος.

• π_μ στον $L^2([0,1], \mu)$. Ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathcal{B}(L^2([0,1], \mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2([0,1], \mu))$ και (μ-σχεδόν) κάθε $t \in [0,1]$.

Οι π_1 και π_2 είναι πιστές αναπαραστάσεις. Για την π_μ, εξαρτάται από τον φορέα του μέτρου.

Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C* άλγεβρας $\mathcal{A}$.

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μοναδα υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό [2] *μοναδιαίο διάνυσμα ώστε*

$$\phi(a) = \big(\pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi\big) \quad \textit{για κάθε} \;\; a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

[2] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ.

Βήματα απόδειξης GNS

[Η απόδειξη στο αρχείο gns23.pdf.]

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.
2. Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $(a,b)_0 := \phi(b^*a)$.
   Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ έχουμε $(a,b)_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.
3. Αφού ϕ θετική, $(a,a)_0 = \phi(a^*a) \geq 0$.
   Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} \ : (u,u)_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ $(= L^2(\mu))$ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{(a,a)_0}$.
   (γράφω $[a] = a + \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$).

Βήματα απόδειξης GNS II

5. Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμ. χώρο $\mathcal{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.

7. Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \, \|[b]\|_\phi$.
   [Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

   Εύκολο: η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.
   [Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τοτε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ.
   $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

8. Θέτουμε $\xi_\phi = [1_{\mathcal{A}}]$. Τότε

$$\begin{aligned}\left(\pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi\right)_{H_\phi} &= \left(\pi_\phi(a)[1], [1]\right)_{H_\phi} \\ &= (a, 1)_{H_\phi} = \phi(1^* a) = \phi(a) \,. \qquad \square\end{aligned}$$

Η Αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και ϕ κατάσταση στην $\mathcal{A}$. Αν (π, H, ξ) αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε

$$(\pi(a)\xi, \xi) = \phi(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$. Δηλαδή υπάρχει μια επί ισομετρία $U : H_\phi \to H$ που ικανοποιεί

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A} \text{ και } U\xi_\phi = \xi.$$

Πόρισμα

Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ C^* άλγεβρα ώστε $I_H \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := (A\xi, \xi)$, $A \in \mathcal{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $A \to A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\mathrm{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$

(... και μπορώ $U\xi_\phi = \xi$.) Απόδειξη: Άσκηση.

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) := (x_1, y_1)_{H_1} + (x_2, y_2)_{H_2}$$

δηλ. με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$).

Αν $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(x_1) \\ T(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολο: η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Χρήσιμη Άσκηση:

$$\|T_1 \oplus T_2\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός

Το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert $H := \bigoplus_{i\in I} H_i$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\xi = (\xi_i)$ με $\xi_i \in H_i$ για κάθε $i \in I$ και

$$\|\xi\|_H := \sup\left\{ \left(\sum_{i\in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\} < \infty .$$

Άσκηση Είναι πλήρης χώρος. Κάθε $\xi \in H$ έχει αριθμήσιμο φορέα $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$(\xi, \eta)_H = \sum_{i\in J_\xi} (\xi_i, \eta_i)_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$. Το *αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$$H_0 := \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του H.

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \to H_0 : (x_i) \to (T_i x_i)\,.$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\mathrm{supp}(T_i x_i) \subseteq \mathrm{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H.

Πρόταση

Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. Μάλιστα

$$\Big\|\bigoplus_i T_i\Big\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}\,.$$

Ευθέα αθροίσματα: Αναπαραστάσεων

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα και για κάθε $i \in I$ έστω (π_i, H_i) μια αναπαράσταση. Επειδή $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \to \oplus H_i : (x_i) \to (\pi_i(a) x_i) \, .$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\oplus H_i) : a \to \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.
Η π είναι μια *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα και $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των states της $\mathcal{A}$.
Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

Ορισμός

Η καθολική αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ είναι η (π, H) όπου

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} H_\phi \quad \text{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} \pi_\phi(a), \;\; a \in \mathcal{A}\,.$$

Στόχος:

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.
Επομένως κάθε C-άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και *-ισομορφικά ως πιστή C*-υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.*

Απόδειξη: $\rightsquigarrow$

Η καθολική αναπαράσταση

Απόδειξη Θεωρήματος Gelfand-Naimark

Έχουμε δείξει (δες την Πρόταση 49) ότι

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathcal{A} \backslash \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$.

Συνεπώς $\left\|\pi_\phi(a)\right\| = \|a\|$ άρα $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Παρατήρηση Έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$ με την ιδιότητα, για κάθε $a \in \mathcal{A} \backslash \{0\}$ να υπάρχει κάποιο $\phi = \phi_a \in \mathcal{F}$ ώστε $\phi(a^*a) = \|a^*a\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\bigoplus_{\phi \in \mathcal{F}} H_\phi) \quad \text{όπου} \quad \pi_{\mathcal{F}}(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{F}} \pi_\phi(a), \;\; a \in \mathcal{A}$$

είναι πιστή αναπαράσταση της $\mathcal{A}$.

Η καθολική αναπαράσταση

Πόρισμα

Αν $\{a_i : i \in I\}$ πυκνό υποσύνολο της $\mathcal{A}$, για κάθε $i \in I$ έστω π_i αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ ώστε $\|\pi_i(a_i)\| = \|a_i\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi := \oplus_{i \in I} \pi_i$$

είναι πιστή.

Παρατήρηση - Άσκηση Αν η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πόρισμα

Αν η $\mathcal{A}$ είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

«Υπερτελεστές»: Απεικονίσεις μεταξύ χώρων τελεστών

Έστω $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ αλγεβρών (ή χώρων τελεστών) [3] και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}) \ \text{ όπου } \ \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

- Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι *-άλγεβρες και η Φ διατηρεί την ενέλιξη, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.
- Αν η Φ είναι *-μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.
- ΔΕΝ έπεται πάντα ότι η $\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ είναι θετική.

Υπενθύμιση

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών είναι θετική ανν

$$a \geq 0 \ \Rightarrow \ \Phi(a) \geq 0.$$

[3] χωρος τελεστων ειναι ενας γραμμικος υποχωρος καποιου $\mathcal{B}(H)$

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Παράδειγμα Αν $\Phi(a) = a^\dagger$ (ανάστροφος) στην $\mathcal{A} = M_2$: προφανώς θετική. Όμως, ενώ το

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι θετικό στην $M_2(M_2) \simeq M_4$, το

$$\Phi_2(A) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι θετικό.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις και τανυστικά γινόμενα

Υπενθύμιση E γραμμικός χώρος, $n \in \mathbb{N}$:

$$E \otimes \mathbb{C}^n \simeq E^n : x \otimes [\lambda_i]_{i=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \vdots \\ \lambda_n x \end{bmatrix} \quad : x \otimes e_i \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E \otimes \mathbb{M}^n \simeq M_n(E) =: x \otimes [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x & \dots & a_{1n}x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x & \dots & a_{2n}x \end{bmatrix}$$

$$: x \otimes E_{ij} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Πλήρως θετικές, πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Υπενθύμιση $\Phi : E \to F$ γραμμική

$$\rightsquigarrow \ \Phi_n : M_n(E) \to M_n(F) : [x_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto [\Phi(x_{ij})]_{i,j=1}^n$$
$$E \otimes M_n \to F \otimes M_n : x \otimes E_{ij} \mapsto \Phi(x) \otimes E_{ij}$$

Δηλαδή $\Phi : E \to F$ γραμμική
$\rightsquigarrow \ \Phi_n := \Phi \otimes \mathrm{id}_{M_n} : E \otimes M_n \to F \otimes M_n$.

Αν A, B είναι C*-άλγεβρες (ή γενικότερα operator systems) μια $\Phi : A \to B$ γραμμική λέγεται πληρως θετικη - completely positive (cp) αν για κάθε n η $\Phi_n : A \otimes M_n \to B \otimes M_n$ είναι θετική.

Λέγεται πληρως φραγμενη - completely bounded (cb) αν $\sup_n \|\Phi_n : M_n(A) \to M_n(B)\| := \|\Phi\|_{cb} < \infty$.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Παραδείγματα πλήρως θετικών (cp) απεικονίσεων:

Κάθε *-μορφισμός π είναι θετικός ($\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0\ \forall a$).

Άρα κάθε *-μορφισμός είναι πλήρως θετικός (γιατί π_n *-μορφισμός).

Κάθε απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(K) : a \mapsto V^*aV$ είναι πλήρως θετική (εδώ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $V \in \mathcal{B}(K, H)$). Σύνθεση:

Επομένως κάθε $a \to V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.

Δεν υπάρχουν άλλες:

Stinespring: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ από μια C-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι φραγμένη, ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } \; a \in \mathcal{A}.$$

Όταν $\Phi(1) = 1$, η V είναι ισομετρία.

Η *-αναπαράσταση π λέγεται διαστολή της Φ μέσω της «εμφύτευσης» $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ (όταν $\Phi(1) = 1$).

[Υπάρχει και μια συνθήκη ελαχιστότητας.]

(Πλήρης απόδειξη στο stineproof23.pdf.)

Βήματα απόδειξης Stinespring

1. Αντί για τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$, θεωρούμε τον $\mathcal{A} \otimes H = \operatorname{span}\{a \otimes \xi : a \in \mathcal{A}, \xi \in H\} := \widetilde{\mathcal{A}}$.
   Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{A}$.
2. Ορίζουμε $(a \otimes \xi, b \otimes \eta)_0 := (\Phi(b^* a)\xi, \eta)_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} b_m \otimes \eta_m \right)_0 := \left(\Phi_N(B^* A)\vec{\xi}, \vec{\eta} \right)_{H^N}.$$

   όπου $B^* A = [b_1^*, \dots, b_N^*]^\dagger [a_1, \dots, a_N] \in M_N(\mathcal{A})$,
   $\vec{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_N]^\dagger \in H^N$.
   Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $(a, b)_0 = \phi(b^* a)$.
3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι

$$(\vec{a}, \vec{a})_0 = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} a_m \otimes \xi_m \right)_0 \geq 0.$$

   Από Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : (\vec{u}, \vec{u})_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{(\vec{a},\vec{a})_0}$ (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes \xi) := ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H)$$

$$\text{ισοδύναμα } \pi_0(a) := L_a \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{H}} \quad (a \in \mathcal{A}).$$

   (όπου $L_a : A \to A : b \mapsto ab$).
   (Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $[\pi_0(a)(b) = ab]$).
6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] = [ab \otimes \xi].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7. Δείχνουμε ότι $\left\|\pi_1(a)([\vec{b}])\right\|_\phi \leq \|a\| \left\|[\vec{b}]\right\|_\phi$.
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.
   Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.
8. Ορίζουμε

$$V : H \to H_{0\phi} \to \mathcal{A} \otimes H : \xi \to \mathbf{1}_\mathcal{A} \otimes \xi \to [\mathbf{1}_\mathcal{A} \otimes \xi]$$

   και επεκτείνουμε γραμμικά. Η V είναι φραγμένη, άρα επεκτείνεται σε φραγμένη $V : H \to H_\phi$.
   Τέλος, για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}((V^*\pi(a)V)\xi, \eta)_H &= (\pi(a)V\xi, V\eta)_{H_\phi} = (\pi(a)[\mathbf{1} \otimes \xi], [1 \otimes \eta])_{H_\phi} \\ &= ([a \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \eta])_{H_\phi} = (\Phi(\mathbf{1}^* a)\xi, \eta)_H .\end{aligned}$$

   Έπεται ότι

$$V^*\pi(a)V = \Phi(a) . \qquad \square$$

Πότε μια θετική απεικόνιση είναι πλήρως θετική;

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C* άλγεβρες και $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι μια θετική γραμμική απεικόνιση, πότε είναι η Φ πλήρως θετική;

• Εν γένει, η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.

• Αν η $\mathcal{A}$ ή η $\mathcal{B}$ είναι *μεταθετικές* C* άλγεβρες, τότε η θετικότητα της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα. (Αποδείξεις παραλείπονται.)

• Θα δείξουμε εδώ ότι αν η $\mathcal{A}$ ή η $\mathcal{B}$ είναι ίσες με $M_d(\mathbb{C})$, τότε (η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα, αλλά) η d-*θετικότητα* της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.

(Αποδείξεις στο choiarv23.pdf.)

Η περίπτωση $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$

Θεώρημα (Choi)

Αν $\mathcal{B}$ είναι μια C^* άλγεβρα και $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$ γραμμική, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Η Φ είναι πλήρως θετική.*
2. *Η Φ είναι d-θετική.*
3. *Ο πίνακας $[\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.*
   (Οι E_{rs} είναι τα matrix units της $M_d(\mathbb{C})$.)

Αναπαράσταση Kraus Στην περίπτωση $\mathcal{B} = M_k(\mathbb{C})$, η πλήρης θετικότητα της Φ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη γραμμικών απεικονίσεων $V_1, \dots V_{kd} \in M_{kd} = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$ ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{dk} V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C}) .$$

Ο ελάχιστος αριθμός μη μηδενικών V_j που απαιτούνται για την αναπαράσταση Kraus της Φ ονομάζεται *τάξη Kraus* της Φ.

Ο $d^2 \times d^2$ πινακας $[E_{rs}]$ των $d \times d$ πινακων $\{E_{rs} : r, s \in [d]\}$

$$[E_{rs}] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = uu^*$$

Συστήματα τελεστών (Operator Systems)

Σύστημα τελεστών (operator system) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (ή $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ όπου $\mathcal{B}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα) που είναι αυτοσυζυγής και περιέχει την μονάδα.

Παραδειγματα

$$\mathcal{S}_1 := \mathrm{span}\{e, 1, e^*\} \subseteq C(\mathbb{T})$$

οπου $e(t) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{S}_2 := \mathrm{span}\{S, 1, S^*\} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2)$$

οπου $S : e_n \mapsto e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ είναι σύστημα τελεστών, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $M_n(\mathcal{S}) \subseteq M_n(\mathcal{B})$ είναι σύστημα τελεστών, αν εφοδιασθεί με την δομή (ενέλιξη, μονάδα και θετικό κώνο $M_n(\mathcal{S})^+ := M_n(\mathcal{B})^+ \cap M_n(\mathcal{S})$) που κληρονομεί από την C* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B})$.

Αν $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ είναι συστήματα τελεστών, μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ λέγεται θετική αν $\varphi(\mathcal{S}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$ και πλήρως θετική αν για κάθε n η απεικόνιση $\varphi^n : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{T}) : [x_{ij}] \mapsto [\varphi(x_{ij})]$ είναι θετική.

Αντιστοιχία Arveson: Η περίπτωση $\Phi : V \to M_d(\mathbb{C})$

Συμβολισμοί Αν V είναι operator system και $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ γραμμική απεικόνιση, ορίζουμε μια γραμμική μορφή $s_\phi : M_d(V) \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$s_\phi(A) = \sum_{i,j=1}^{d} \left(\phi(a_{i,j})e_j, e_i\right)_{\ell^2[d]}, \quad A = [a_{i,j}] \in M_d(V)$$

όπου $\{e_j\}_{j=1}^d$ η κανονική βάση του $\ell^2[d]$.

Θεώρημα

Έστω V ένα σύστημα τελεστών, $d \in \mathbb{N}$ και $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(1) *Η $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική.*

(2) *Η $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ είναι d-θετική.*

(3) *Η $s_\phi : M_d(V) \to \mathbb{C}$ είναι θετική.*

Επέκταση θετικών απεικονίσεων

(Αποδείξεις στο arvext23.pdf.)

Πρόταση

Αν V είναι ένα σύστημα τελεστών και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή, τότε η ω είναι θετική αν και μόνον αν (είναι φραγμένη και) $\|\omega\| = \omega(1)$ (όπου 1 η μονάδα του V).

Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \to M_2(\mathbb{C})$.

Παράδειγμα

Έστω $V \subseteq C(\mathbb{T})$ η γραμμική θήκη των $\{1, \zeta, \bar{\zeta}\}$ όπου $\zeta(z) = z$. Δηλαδή κάθε $f \in V$ είναι της μορφής $f(e^{it}) = a + be^{it} + ce^{-it}$ με $a, b, c \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε

$$\phi : V \to M_c(\mathbb{C}) : f \mapsto \begin{bmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{bmatrix}.$$

Τότε η ϕ είναι θετική αλλά $\|\phi\| > \|\phi(1)\|$.

Επέκταση θετικών απεικονίσεων

Λήμμα

Έστω $V \subseteq \mathcal{B}(H)$ *ένα σύστημα τελεστών και* $\omega : V \to \mathbb{C}$ *μια γραμμική μορφή με* $\|\omega\| = \omega(1) = 1$. *Για κάθε* $x = x^* \in V$, *έχουμε*

$$\min \sigma(x) \leq \omega(x) \leq \max \sigma(x)$$

(όπου $\sigma(x)$ *το φάσμα του τελεστή* $x \in V \subseteq \mathcal{B}(H)$*).*

Λήμμα

Έστω V *ένα σύστημα τελεστών.*
(1) Αν $a \in V$, *το* $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ *είναι θετικό αν και μόνον αν* $\|a\| \leq 1$.
(2) Έστω $a \in V$ *και* $p \in V^+$. *Αν το* $\left[\begin{smallmatrix} p & a \\ a^* & p \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ *είναι θετικό, τότε* $\|a\| \leq \|p\|$.

Επέκταση πλήρως θετικών απεικονίσεων

Πρόταση

Αν V *ένα σύστημα τελεστών και* $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ *είναι 2-θετική, τότε* $\|\Phi\| = \|\Phi(1)\|$ *(δηλαδή* $\|\Phi(v)\| \leq \|\Phi(1)\|$ *για κάθε* $v \in V$ *με* $\|v\| \leq 1$*).*

Πρόταση

Αν V *ένα σύστημα τελεστών και* $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ *είναι πλήρως θετική, τότε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *έχουμε* $\|\Phi^{(n)}\| = \|\Phi(1)\|$ *(δηλαδή* $\|[\Phi(v_{ij})]\| \leq \|\Phi(1)\|$ *για κάθε* $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$ *με* $\|v\| \leq 1$*).*

Θέτοντας $\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi^{(n)}\|$, λέμε ότι η Φ είναι *πλήρως φραγμένη (completely bounded)* αν $\|\Phi\|_{cb} < \infty$.

Επέκταση πλήρως θετικών απεικονίσεων

Πρόταση (Krein)

Αν $V \subseteq W$ είναι συστήματα τελεστών και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια θετική γραμμική μορφή, τότε η ω έχει επέκταση σε μια γραμμική μορφή $\tilde{\omega} : W \to \mathbb{C}$ που είναι θετική.

Παράδειγμα: Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \to M_2(\mathbb{C})$. Πράγματι, αν η απεικόνιση ϕ του Παραδείγματος 64 είχε θετική επέκταση στην $C(\mathbb{T})$, τότε η επέκταση αυτή θα ήταν πλήρως θετική από ενα θεώρημα του Stinespring (δες shrlem23.pdf, Θεώρημα 5) (αφού η $C(\mathbb{T})$ είναι αβελιανή), οπότε θα έπρεπε να ικανοποιεί $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.

Θεώρημα επέκτασης Arveson

Θεώρημα (Arveson)

Αν $V \subseteq W$ είναι συστήματα τελεστών και $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση, τότε η Φ έχει επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση $\widetilde{\Phi} : W \to \mathcal{B}(H)$ που είναι πλήρως θετική.

Πρόταση

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ είναι σύστημα τελεστών σε μια C άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα και $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση, υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι φραγμένη, ώστε*

$$\Phi(x) = V^*\pi(x)V \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{S}.$$