Το φάσμα στοιχείου άλγεβρας Banach

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathcal{A}$ λέγεται *αντιστρέψιμο (invertible)* αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{A}$ ώστε $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Πρόταση 1. *(i) Αν $\|\mathbf{1} - a\| < 1$ τοτε το a ειναι αντιστρεψιμο και μαλιστα*

$$a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{1} - a)^k .$$

(ii) Το $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ *ειναι ανοικτο υποσυνολο της $\mathcal{A}$ και η απεικονιση $a \mapsto a^{-1}$ ειναι συνεχης στο* $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ *(αρα ομοιομορφισμος).*

Απόδειξη. Η σειρα $s = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{1} - a)^k$ συγκλινει απολυτα: $\sum_{k=0}^{\infty} \|(\mathbf{1} - a)^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{1} - a\|^k < \infty$. Επομενως, λογω πληροτητας (τα μερικα της αθροισματα αποτελουν βασικη ακολουθια), συγκλίνει σε καποιο $s \in \mathcal{A}$. Θετοντας $b := \mathbf{1} - a$, εχουμε

$$as = (\mathbf{1} - b) \lim_N \sum_{k=0}^{n} b^k = b^0 - \lim_n b^{n+1} = \mathbf{1}$$

(αφου $\|b\| < 1$) και ομοιως $sa = \mathbf{1}$. Δειξαμε οτι $a \in \mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ και $a^{-1} = s$.

Συνεπως εχουμε δειξει οτι η ανοικτη μπαλα $B(\mathbf{1}, 1)$ στην $\mathcal{A}$ με κεντρο $\mathbf{1}$ και ακτινα 1 περιεχεται στο $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$.

Αρα το $\mathbf{1}$ ειναι εσωτερικο σημειο του $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$.

Αν τωρα $a \in \mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$, επειδη η απεικονιση $\lambda_a : b \mapsto ab$ είναι ομοιομορφισμος της $\mathcal{A}$, το a θα ειναι κι αυτο εσωτερικο σημειο του $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$: συγκεκριμενα, αν $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ τοτε $b \in \mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$. Πραγματι,

$$\left\|\mathbf{1} - a^{-1}b\right\| = \left\|a^{-1}(a - b)\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\| \|a - b\| < 1$$

πραγμα που σημαινει οτι το $a^{-1}b$ είναι αντιστρεψιμο, αρα και το $b = aa^{-1}b$ είναι αντιστρεψιμο.

Δειξαμε λοιπον οτι το $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ ειναι ανοικτο στην $\mathcal{A}$.

Για να δειξουμε οτι η $a \mapsto a^{-1}$ ειναι συνεχης στο $\mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$, θεωρουμε $a, b \in \mathrm{Inv}\,\mathcal{A}$ και υπολογιζουμε:

$$\begin{aligned}
\left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| &= \left\|b^{-1}(b - a)a^{-1}\right\| \\
&= \left\|(b^{-1} - a^{-1})(b - a)a^{-1} + a^{-1}(b - a)a^{-1}\right\| \\
&\leqslant \left\|b^{-1} - a^{-1}\right\| \|b - a\| \left\|a^{-1}\right\| + \left\|a^{-1}\right\|^2 \|b - a\| \\
\text{αρα} \quad \left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| (1 - \|b - a\| \left\|a^{-1}\right\|) &\leqslant \left\|a^{-1}\right\|^2 \|b - a\| \ .
\end{aligned}$$

Απο την τελευταια ανισοτητα επεται οτι

$$\lim_{b \to a} \left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| = 0$$

οπως θελαμε. $\square$

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Το* **φάσμα (spectrum)** $\sigma(x)$ *του x είναι το σύνολο*

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$ λέγεται **επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent)** *του x.*

Παραδειγματα (ι) Αν $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$, το φασμα ενος πινακα ειναι το συνολο των ιδιοτιμων του. Το γεγονος οτι ειναι μη κενο οφειλεται στο Θεμελιωδες Θεωρημα της Αλγεβρασ, οτι καθε μη σταθερο πολυωνυμο με μιγαδικους συντελεστες εχει ριζα. Το Θεωρημα αυτο με τη σειρα του αποδεικνυεται συνηθως με το Θεωρημα Liouville της Μιγαδικης Αναλυσης, ότι καθε μιγαδικη συναρτηση που εχει παντου μιγαδικη παραγωγο και ειναι φραγμενη, ειναι αναγκαστικα σταθερη.

(ιι) Αν $\mathcal{A} = M_n(H)$ οπου H χωρος Hilbert, δεν ειναι αληθεια οτι καθε τελεστης εχει ιδιοτιμες (παραδειγμα το shift $e_n \mapsto e_{n+1}$ στον ℓ^2). Οπως θα δουμε ομως (παλι με μεθοδους Μιγαδικης Αναλυσης) το φασμα καθε τελεστη ειναι μη κενο..

(ιιι) $\mathcal{A} = C(K)$ οπου K συμπαγης χωρος Hausdorff, το φασμα καθε συνεχους συναρτησης f ειναι το (συμπαγες) συνολο τιμων της $f(K)$. Πραγματι, η $1/(\lambda - f)$ οριζεται αν και μονον αν η $\lambda - f$ δεν μηδενιζεται πουθενα, δηλαδη αν-ν $\lambda \notin f(K)$, και τοτε η $1/(\lambda - f)$ ειναι συνεχης.

Θεώρημα 2. *Σε κάθε άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι* μη κενό και συμπαγές *υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η επιλύουσα συνάρτηση*

$$\mathbb{C}\backslash\sigma(x) \to \mathcal{A} : \lambda \to r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$$

είναι ολόμορφη *(:έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$).* [1]

Απόδειξη. (i) Έστω πρώτα $|\lambda| > \|x\|$. Τότε $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$ άρα $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|(\frac{x}{\lambda})^n\right\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n < \infty$ (γεωμετρική σειρά). Συνεπώς η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (πληρότητα της $\mathcal{A}$). Έχουμε

$$r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

διότι

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{1} - x)\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}(\lambda\mathbf{1} - x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \\ &= \mathbf{1} - \frac{x^{N+1}}{\lambda^{N+1}} \to 0 \ \text{ καθώς } N \to \infty\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|x\|$ ανήκει στο $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$.

• *Δηλαδή το $\sigma(x)$ είναι φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{C}$ και μάλιστα $\sigma(x) \subseteq B(0, \|x\|)$.*

(ii) Έστω τώρα $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(\lambda_0, \delta) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, οπότε το $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ είναι ανοικτό, και ότι η $\lambda \to r_\lambda(x)$ έχει δυναμοσειρά που συγκλίνει για κάθε λ_0 στην $B(\lambda_0, \delta)$.

[1] Σχόλιο: Χρησιμοποιουμε εδω ως *ορισμο* της ολομορφιας την τοπικη παραστασιμοτητα σε δυναμοσειρα. Αποδεικνυεται (αλλα δεν θα μας χρειασθει) οτι η συνθηκη αυτη ισοδυναμει με την υπαρξη παραγωγου (δηλ. $\|\cdot\|$-$\lim_{\lambda\to\lambda_0} r_\lambda(x) \in \mathcal{A}$) σε καθε σημειο λ_0 του πεδιου ορισμου της συναρτησης.

Πράγματι: αφού $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, το $r_{\lambda_0}(x) = (\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$ ορίζεται. Το συμβολίζουμε με $r \in \mathcal{A}$ για συντομία, και θέτουμε $\delta = \frac{1}{\|r\|}$.

Έστω $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$, δηλαδή $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|r\|}$. Θέτοντας $\mu = \lambda_0 - \lambda$, παρατηρούμε ότι $\|\mu r\| < 1$ άρα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\mu r)^n$ συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (όπως πριν) και έχουμε

$$r\sum_{n=0}^{\infty}(\mu r)^n = r(\mathbf{1} - \mu r)^{-1} = (r^{-1} - \mu\mathbf{1})^{-1} = ((\lambda_0\mathbf{1} - x) - (\lambda_0 - \lambda)\mathbf{1})^{-1} = (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$$

άρα το $r_\lambda(x)$ ορίζεται, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ και (αντικαθιστώντας $\mu = \lambda_0 - \lambda$ και $r = (\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1}$)

$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n(\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-(n+1)} \tag{*}$$

που είναι η δυναμοσειρά της $\lambda \to r_\lambda(x)$ με κέντρο λ_0. Δείξαμε λοιπόν ότι

- *το $\sigma(x)$ είναι κλειστό στο $\mathbb{C}$ (αρα συμπαγες)* και
- *η $\lambda \to r_\lambda(x)$ έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$.*

(iii) Υποθέτουμε τώρα, προς άτοπο, ότι το $\sigma(x)$ είναι κενό. Από το (ii), ξέρουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{C} \to \mathcal{A} : \lambda \to r_\lambda(x)$ ορίζεται παντού και έχει (τοπικά) δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Σταθεροποιούμε μια συνεχή γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \lambda \to \phi(r_\lambda(x)).$$

Για κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, εφαρμόζοντας την ϕ στην σχέση (*) έχουμε, από τη γραμμικότητα και τη συνέχεια της ϕ,

$$f(\lambda) = \phi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n\phi((\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-(n+1)}) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(\lambda_0 - \lambda)^n$$

όπου $c_n = \phi((\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-(n+1)}) \in \mathbb{C}$ και η σειρά συγκλίνει για κάθε $\lambda \in B(\lambda_0, \frac{1}{\|r\|})$, όπως είδαμε στο (ii).

Δηλαδή η η f έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, συνεπώς είναι ακέραια (έχει μιγαδική παράγωγο σε κάθε λ_0).

Ειδικότερα όταν $|\lambda| > \|x\|$ ξέρουμε από το (i) ότι

$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \qquad \text{άρα } \; f(\lambda) = \phi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi(x^n)\frac{1}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Κατά συνέπεια, ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή πάνω σε έναν κύκλο $\gamma(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ακτίνας $\rho > \|x\|$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο, [2] έχουμε

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\phi(x^n)\int_\gamma \frac{1}{\lambda^{n+1}}d\lambda = 2\pi i\,\phi(x^0) = 2\pi i\,\phi(\mathbf{1})$$

[2] όταν $|\lambda| = \rho$,

$$\|r_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\left(1 - \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|\right)^{-1} = (\rho - \|x\|)^{-1}$$

άρα $|f(\lambda)| \leqslant \|\phi\|\,\|r_\lambda(x)\| \leqslant \|\phi\|\,(\rho - \|x\|)^{-1}$

Όμως, αφού η f είναι ακέραια, το ολοκλήρωμά της στον κλειστό κύκλο μηδενίζεται (τοπικό Θεώρημα Cauchy!). Κατά συνέπεια, έχουμε $\phi(\mathbf{1}) = 0$. Άλλά η συνεχής γραμμική μορφή ϕ ήταν αυθαίρετη, και από το Θεώρημα Hahn Banach μπορούμε να βρούμε ϕ ώστε $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$.

Η αντίφαση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το $\sigma(x)$ δεν μπορεί να είναι κενό.

Σημείωση Στο τελευταίο βήμα μπορεί κανείς να ολοκληρώσει την απόδειξη και ως εξής:

Όταν $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε $|f(\lambda)| \leqslant \|\phi\| \, (|\lambda| - \|x\|)^{-1}$ όπως είδαμε, άρα $\lim_{|\lambda|\to\infty} |f(\lambda)| = 0$. Αφού η f είναι ακέραια και μηδενίζεται στο άπειρο, από το Θεώρημα Liouville (!) έπεται ότι αναγκαστικά $f = 0$. Θέτοντας $\lambda = 0$ βρίσκουμε $0 = f(0) = \phi(x^{-1})$, που οδηγεί πάλι σε άτοπο από το Θεώρημα Hahn Banach. $\square$