# Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

**Παράδειγμα 1.** $\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ *(όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

**Πρόταση 2.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια* C* υπάλγεβρα *με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξω ότι αν $b \in \mathcal{B}$ και $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, τότε $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$. Μπορώ να υποθέσω ότι $\|b\| = 1$.

Έστω $a \in \mathcal{A}$ ο αντίστροφος του $b$ στην $\mathcal{A}$. Να δείξουμε ότι $a \in \mathcal{B}$.

Θεωρώ το $c = b^*b$ και παρατηρώ ότι είναι αυτοσυζυγές, ότι ανήκει στην $\mathcal{B}$ (διότι η $\mathcal{B}$ είναι *-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$, άρα περιέχει και το $b^*$), και ότι είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$ με αντίστροφο το $aa^*$: Πράγματι, $(b^*b)(aa^*) = b^*(ba)a^* = b^*a^* = (ab)^* = \mathbf{1}$ και $(aa^*)(b^*b) = a(a^*b^*)b = a(ba)^*b = ab = \mathbf{1}$.

Υποθετουμε πρωτα οτι $b = b^*$. Τοτε $c = b^2$ επομενως

$$\sigma_{\mathcal{A}}(c) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(b)\}.$$

(Πραγματι, αφου τα $(\lambda\mathbf{1} - b)$ και $(\lambda\mathbf{1} + b)$ μετατιθενται, το $\lambda^2\mathbf{1} - b^2 = (\lambda\mathbf{1} - b)(\lambda\mathbf{1} + b)$ αντιστρεφεται αν και μονον αν $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$ και $-\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, οποτε $\mu \in \sigma_{\mathcal{A}}(b^2)$ αν και μονον αν το $\mu$ ειναι της μορφης $\lambda^2$ για καποιο $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(b)$.)

Ομως, αφου $b = b^*$, ισχυει οτι $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \mathbb{R}$ (οπως εχουμε δειξει), αρα $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq [-\|b\|, \|b\|]$, και συνεπως

$$\sigma_{\mathcal{A}}(c) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(b)\} \subseteq [0, \|b\|^2] = [0, 1]\,.$$

Αφού το $c$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$, έχουμε οτι το $0$ δεν ανηκει στο κλειστο συνολο $\sigma_{\mathcal{A}}(c)$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\sigma_{\mathcal{A}}(c) \subseteq [\delta, 1]$. Επομένως

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{1} - c) \subseteq [0, 1 - \delta].$$

(Πράγματι, $\lambda\mathbf{1} - (\mathbf{1} - c) = -((1 - \lambda)\mathbf{1} - c)$, συνεπώς $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{1} - c) \iff (1 - \lambda) \in \sigma_{\mathcal{A}}(c)$, άρα αν $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(\mathbf{1} - c)$ τότε $1 - \lambda \in [\delta, 1]$ άρα $\lambda \in [0, 1 - \delta]$.) Όμως το $\mathbf{1} - c$ είναι αυτοσυζυγές, άρα η νόρμα του ισούται με τη φασματική του ακτίνα, οπότε

$$\|\mathbf{1} - c\| \leqslant 1 - \delta < 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}(\mathbf{1} - c)^k$ συγκλίνει, και το όριό της, όπως ξέρουμε, είναι το $c^{-1} \in \mathcal{A}$. Αλλά τα μερικά αθροίσματα της σειράς ανήκουν στην υπάλγεβρα $\mathcal{B}$, η οποία είναι κλειστή στην $\mathcal{A}$, άρα και το όριο ανήκει στην $\mathcal{B}$.

Δηλαδη ο αντίστροφος $a^2$ του $c$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Τότε όμως, αφού $ab = \mathbf{1}$, έχουμε $a = a^2b$, άρα $a \in \mathcal{B}$.

Δειξαμε λοιπον οτι οταν $b = b^* \in \mathcal{B}$, ο αντίστροφός του ανηκει επισης στην $\mathcal{B}$.

Για την γενικη περιπτωση $b \in \mathcal{B}$, εφαρμοζουμε στο αυτοσυζυγες στοιχειο $c = b^*b$ αυτο που μολις δειξαμε. Συμπεραινουμε οτι ο αντιστροφος $aa^*$ του $c$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Τότε όμως, αφού $a^*b^* = \mathbf{1}$, έχουμε $a = (aa^*)b^*$, άρα $a \in \mathcal{B}$, όπως θέλαμε. $\square$