Θεώρημα Stinespring

Θεώρημα 1 (Stinespring)**.** *Για κάθε* [1]*πλήρως θετική απεικόνιση* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *από μια* C^**-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *με μονάδα στον* $\mathcal{B}(H)$ *υπάρχει* (π, H_ϕ, V) *όπου* π *είναι* $*$*-αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$ *σ' έναν χώρο Hilbert* H_ϕ *και* $V : H \to H_\phi$ *είναι φραγμένος τελεστής ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \textit{για κάθε} \;\; a \in \mathcal{A}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"] & & \mathcal{B}(H) \\
& \mathcal{B}(H_\phi) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{ad}\, V"] &
\end{tikzcd}$$

Αν επιπλέον $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$*, τότε η* V *είναι ισομετρία.*

Απόδειξη

1. Για να φτιάξουμε τον χώρο Hilbert H_ϕ, θεωρούμε πρώτα τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A} \otimes H$.

   Γράφω για συντομία $\widetilde{\mathcal{A}}$ αντί για $\mathcal{A} \otimes H$.

   [Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{A}$.]

2. Ορίζουμε την απεικόνιση
   $$\langle \cdot, \cdot \rangle_o : \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$$
   ως εξής: θέτουμε $\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle_o := \langle \Phi(b^*a)\xi, \eta \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή
   $$\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{M} b_m \otimes \eta_m \rangle_o := \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* a_n)\xi_n, \eta_m \rangle_H \,.$$

   Η $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι καλά ορισμένη και sesquilinear.

   Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2 από το Τανυστικά γινόμενα και χώροι τελεστών, έχουμε:
   Για κάθε $(b, \eta) \in \mathcal{A} \times H$ η απεικόνιση $\mathcal{A} \times H \to \mathbb{C} : (a, \xi) \mapsto \langle \Phi(b^*a)\xi, \eta \rangle_H$ είναι διγραμμική, άρα ορίζει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\mathcal{A} \otimes H \to \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n \mapsto \sum_n \langle \Phi(b^* a_n)\xi_n, \eta \rangle_H$.
   Τώρα, για κάθε $\vec{a} = \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ η απεικόνιση $\mathcal{A} \times H \to \mathbb{C} : (b, \eta) \mapsto \sum_n \langle \eta, \Phi(b^* a_n)\xi_n \rangle_H$ είναι διγραμμική, άρα ορίζει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\mathcal{A} \otimes H \to \mathbb{C} : \sum_{m=1}^{M} b_m \otimes \eta_m \mapsto \sum_{n,m} \langle \eta_m, \Phi(b_m^* a_n)\xi_n \rangle_H$.

   [Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_o = \Phi(b^*a)$.]

[1]stineproof25, modified 11 Μαΐου 2025

3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι για κάθε $\vec{b} = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$,

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o = \langle \sum_{n=1}^{N} b_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} b_m \otimes \xi_m \rangle_o \geqslant 0.$$

Πράγματι αν $X := [b_m^* b_n] \in M_N(\mathcal{A})$, έχουμε $[\Phi(b_m^* b_n)] = \Phi_N(X) \in \mathcal{B}(H^N)$ και

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle_o := \sum_{n,m} \langle b_n \otimes \xi_n, b_m \otimes \xi_m \rangle_o = \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* b_n) \xi_n, \xi_m \rangle_H = \langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \qquad (\dagger)$$

όπου $\vec{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N]^\dagger$. Όμως ο πίνακας X παραγοντοποιείται

$$X = \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \ldots & 0 \\ b_2^* & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_N^* & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_N \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = B^* B$$

άρα είναι θετικός, οπότε (αφού η Φ_N είαι θετική απεικόνιση) ο $\Phi_N(X)$ είναι θετικός και άρα $\langle \Phi_N(X) \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle_{H^N} \geqslant 0$.

Άρα το $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ είναι ημιεσωτερικό γινόμενο. Συνεπώς ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o|^2 \leqslant \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o$.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι

$$\{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\} = \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle_o = 0 \ \forall \vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}\} \qquad (*)$$

και συνεπώς το σύνολο

$$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_o = 0\}$$

είναι γραμμικός χώρος.

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := (\mathcal{A} \otimes H)/\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$. Ο χώρος $H_{0\phi}$ εφοδιάζεται με το (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο $\langle [\vec{a}], [\vec{b}] \rangle_\phi := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_o$ (όπου γράφουμε $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).

   [Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.]

   Ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_o}$.

5. Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμικό χώρο $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes \xi) := ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H)$$

$$\text{δηλαδή} \ \ \pi_0(a) \left(\sum_n b_n \otimes \xi_n \right) := \sum_n a b_n \otimes \xi_n \quad (a \in \mathcal{A},\, \vec{b} = \sum_n b_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}.)$$

   [Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\pi_0(a)(b) = ab$.]

Παρατήρηση. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b}, \vec{c} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ έχουμε

$$\langle \pi_0(a)\vec{b}, \vec{c}\rangle_o = \langle \vec{b}, \pi_0(a^*)\vec{c}\rangle_o .$$

Απόδειξη. Από την sesquilinearity του $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$, αρκεί να υποθέσουμε ότι $\vec{b}, = b \otimes \eta$ και $\vec{c} = c \otimes \xi$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\langle \pi_0(a)\vec{b}, \vec{c}\rangle_o &= \langle ab \otimes \eta, c \otimes \xi\rangle_o = \langle \Phi(c^*(ab))\eta, \xi\rangle_H = \langle \Phi((a^*c)^*b)\eta, \xi\rangle_H \\ &= \langle b \otimes \eta, (a^*c) \otimes \xi\rangle_o = \langle \vec{b}, \pi_0(a^*)\vec{c}\rangle_o .\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{N}$. Δείχνουμε ότι $\pi_0(a)(u) \in \mathcal{N}$: Από την Παρατήρηση έχουμε

$$\langle \pi_0(a)u, \pi_0(a)u\rangle_o = \langle u, \pi_0(a^*)\pi_0(a)u\rangle_0 = \langle u, \pi_0(a^*a)u\rangle_0$$

το οποιο μηδενίζεται αφού $u \in \mathcal{N}$, από τη σχέση $(*)$ στο βήμα (3).

6. Επομένως ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον χώρο πηλίκο $H_{o\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:
$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] := [ab \otimes \xi] \quad (b \in \mathcal{A}, \xi \in H).$$

Για να δείξουμε ότι καθε $\pi_1(a)$ είναι φραγμένος τελεστής στον $H_{o\phi}$, θα χρειασθεί ο

Ισχυρισμός. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} = \sum_{n=1}^N b_n \otimes \xi_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ έχουμε

$$\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o \leqslant \|a^*a\| \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_o .$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Όπως στη σχέση (†) από το Βήμα (3) έχουμε

$$\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o := \sum_{n,m} \langle (ab_n) \otimes \xi_n, (ab_m) \otimes \xi_m\rangle_o = \sum_{n,m} \langle \Phi((ab_m)^*(ab_n))\xi_n, \xi_m\rangle_H = \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N}$$

όπου $Y = [(ab_m)^*(ab_n)] \in M_N(\mathcal{A})$, οπότε $[\Phi((ab_m)^*ab_n)] = \Phi_N(Y) \in \mathcal{B}(H^N)$. Ο πίνακας $Y = [b_m^* a^* a b_n]$ παραγοντοποιείται

$$Y = \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \dots & 0 \\ b_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_N^* & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a^*a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a^*a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} := B^*CB .$$

Παρατηρούμε ότι $Y \leqslant \|C\| B^*B$.

Πράγματι, αναπαριστώντας την C* άλγεβρα $M_N(\mathcal{A})$ ως τελεστές που δρουν σ' έναν χώρο Hilbert K (Θεώρημα Gelfand-Naimark), [2] για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle B^*CBx, x\rangle = \langle CBx, Bx\rangle \leqslant \|C\| \|Bx\|^2 = \|C\| \langle B^*Bx, x\rangle = \langle (\|C\| B^*B)x, x\rangle .$$

[2]Άλλος τρόπος: επειδή $0 \leqslant C \leqslant \|C\| \mathbf{1}$, θέτοντας $D := (\|C\| \mathbf{1} - C)^{1/2}$ έχουμε $B^*(\|C\| \mathbf{1} - C)B = B^*D^*DB = (DB)^*DB \geqslant 0$, δηλαδή $B^* \|C\| B \geqslant B^*CB$.

Εφαρμόζοντας στην ανισότητα $Y \leqslant \|C\|\, B^*B$ την θετική απεικόνιση Φ_N, προκύπτει ότι

$$\Phi_N(Y) \leqslant \|C\|\, \Phi_N(B^*B)\,.$$

Όμως $C = \mathrm{diag}(a^*a)$ και συνεπώς $\|C\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Έχουμε λοιπόν τελικά

$$\begin{aligned}\langle \pi_0(a)\vec{b}, \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o &= \langle \Phi_N(Y)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \leqslant \langle \|C\|\, \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \\ &= \|a\|^2 \langle \Phi_N(B^*B)\vec{\xi}, \vec{\xi}\rangle_{H^N} \overset{(\dagger)}{=} \|a\|^2 \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_o\end{aligned}$$

(όπως δείξαμε στο Βήμα 3) και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Εναλλακτική απόδειξη του Ισχυρισμού. Σταθεροποιούμε ένα $\vec{b}$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : a \mapsto \psi(a) = \langle \pi_0(a)\vec{b}, \vec{b}\rangle_o\,.$$

Αφού η π_0 και η $\langle \cdot\, \vec{b}, \vec{b}\rangle_o$ είναι θετικές, η απεικόνιση ψ είναι θετική, οπότε $\|\psi\| = \psi(\mathbf{1})$, όπως έχουμε δείξει. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\langle (\pi_0(a)\vec{b}), \pi_0(a)\vec{b}\rangle_o &= \langle \pi_0(a^*)(\pi_0(a)\vec{b}), \vec{b}\rangle_o \;\; \text{(από την Παρατήρηση)} \\ &= \langle \pi_0(a^*a)\vec{b}, \vec{b}\rangle_o \\ &= \psi(a^*a) \leqslant \psi(\mathbf{1})\, \|a^*a\| \\ &= \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_o \|a^*a\| = \|a\|^2 \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle_o\end{aligned}$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

7. Από τον Ισχυρισμό έπεται ότι $\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi \leqslant \|a\|\, \|[\vec{b}]\|_\phi$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και $\vec{b} \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Πράγματι,

$$\|\pi_1(a)([\vec{b}])\|_\phi = \|\pi_0(a)\vec{b}\|_o \leqslant \|a\|\, \|\vec{b}\|_o = \|a\|\, \|[\vec{b}]\|_\phi\,.$$

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)\,.$$

Δείχνουμε ότι η π_ϕ είναι *-αναπαράσταση:

(α) Έστω $a, a' \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $(b, \xi) \in \mathcal{A} \times H$, έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_\phi(a + \lambda a')[b \otimes \xi] &= \pi_1(a + \lambda a')[b \otimes \xi] = [((a + \lambda a')b) \otimes \xi] \\ &= [(ab + \lambda a'b) \otimes \xi] = [ab \otimes \xi] + \lambda[a'b \otimes \xi] \\ &= \pi_\phi(a)[b \otimes \xi] + \lambda \pi_\phi(a')[b \otimes \xi] \\ &= (\pi_\phi(a) + \lambda \pi_\phi(a'))[b \otimes \xi]\,.\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $[\vec{b}] = [\sum_n b_n \otimes \xi_n] \in \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ έχουμε

$$\pi_\phi(a + \lambda a')[\vec{b}] = (\pi_\phi(a) + \lambda \pi_\phi(a'))[\vec{b}]$$

λόγω γραμμικότητας των $\pi_\phi(a+\lambda a')$ και $\pi_\phi(a)+\lambda\pi_\phi(a')$ και άρα, αφού οι τελεστές αυτοί είναι συνεχείς και ο $H_{0\phi}$ είναι πυκνός στον H_ϕ,

$$\pi_\phi(a+\lambda a') = \pi_\phi(a)+\lambda\pi_\phi(a')\,.$$

(β) Ομοίως, για να δείξουμε ότι

$$\pi_\phi(aa') = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')$$

για κάθε $a, a' \in \mathcal{A}$, αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα

$$\pi_\phi(aa')[b\otimes\xi] = \pi_\phi(a)(\pi_\phi(a')[b\otimes\xi])$$

για κάθε $(b,\xi)\in\mathcal{A}\times H$, η οποία ισχύει γιατί

$$\pi_\phi(aa')[b\otimes\xi] = [(aa')b\otimes\xi] = [a(a'b)\otimes\xi] = \pi_\phi(a)[(a'b)\otimes\xi] = \pi_\phi(a)\pi_\phi(a')[b\otimes\xi]\,.$$

(γ) Δείχνουμε τέλος ότι $(\pi_\phi(a))^* = \pi_\phi(a^*)$ για κάθε $a\in\mathcal{A}$: Για κάθε $[\vec{b}],[\vec{c}]\in\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N} = H_{0\phi}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle(\pi_\phi(a))^*[\vec{b}],[\vec{c}]\rangle_\phi &= \langle[\vec{b}],\pi_\phi(a)[\vec{c}]\rangle_\phi \quad \text{(ορισμός του } \pi_\phi(a))^*\text{)}\\ &= \langle\vec{b},\pi_0(a)\vec{c}\rangle_o\\ &= \langle\pi_0(a^*)\vec{b}),\vec{c}\rangle_o \quad \text{(από την Παρατήρηση)}\\ &= \langle\pi_\phi(a^*)[\vec{b}],[\vec{c}]\rangle_\phi\end{aligned}$$

άρα οι $(\pi_\phi(a))^*$ και $\pi_\phi(a^*)$ ταυτίζονται στον $H_{0\phi}$ και επομένως, λόγω συνέχειας των τελεστών αυτών, έπεται ότι θα ταυτίζονται και στον H_ϕ.

8. Ορίζουμε

$$V: H\to\widetilde{\mathcal{A}}\to H_\phi : \xi\to\mathbf{1}_\mathcal{A}\otimes\xi\to[\mathbf{1}_\mathcal{A}\otimes\xi]\,.$$

Για κάθε $\xi\in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|V\xi\|^2_{H_\phi} &= \langle[\mathbf{1}\otimes\xi],[\mathbf{1}\otimes\xi]\rangle_\phi\\ &= \langle\Phi(\mathbf{1}^*\mathbf{1})\xi,\xi\rangle_H\\ &\leqslant \|\Phi(\mathbf{1})\|\,\|\xi\|^2_H\end{aligned}$$

δηλαδή η V είναι φραγμένη. Αν $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, τότε $\|V\xi\|^2_{H_\phi} = \langle\xi,\xi\rangle_H$, άρα η V είναι ισομετρία.

Τέλος, για κάθε $\xi,\eta\in H$,

$$\begin{aligned}\langle(V^*\pi(a)V)\xi,\eta\rangle_H &= \langle\pi(a)V\xi,V\eta\rangle_{H_\phi} = \langle\pi(a)[\mathbf{1}\otimes\xi],[\mathbf{1}\otimes\eta]\rangle_{H_\phi}\\ &= \langle[a\otimes\xi],[\mathbf{1}\otimes\eta]\rangle_{H_\phi} = \langle\Phi(\mathbf{1}^*a)\xi,\eta\rangle_H\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$V^*\pi(a)V = \Phi(a)\,. \qquad \square$$

Σχόλιο. Στην περίπτωση $H = \mathbb{C}$, το θεώρημα Stinespring δεν είναι άλλο από την Κατασκευή GNS: Πράγματι, έχουμε τότε $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{A}$ και

$$V:\mathbb{C}\to H_\phi : \xi\to\mathbf{1}_\mathcal{A}\otimes\xi\to\xi[\mathbf{1}_\mathcal{A}]\,.$$

Τώρα $\Phi(a) \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ και για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\Phi(a)\xi\bar{\eta} = \langle \Phi(a)\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \langle (V^*\pi(a)V)\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \pi(a)V\xi, V\eta \rangle_{H\phi}$$

που για $\xi = \eta = 1$ δίνει

$$\Phi(a) = \langle \pi(a)[\mathbf{1}_{\mathcal{A}}], [\mathbf{1}_{\mathcal{A}}] \rangle_{H\phi} .$$