Σημειώσεις πάνω στα Τανυστικά γινόμενα

Αλέξανδρος Χατζηνικολάου

1 Αλγεβρικά Τανυστικά Γινόμενα

Έστω E, F γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$.

Ορισμός 1.1. *Τανυστικό γινόμενο των E και F ονομάζεται ένα ζεύγος (M, ϕ), όπου M ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $\phi : E \times F \to M$ μια διγραμμική απεικόνιση που ικανοποιούν τα εξής:*

1. $M = span\{\phi(x, y) : x \in E, y \in F\}$
2. *Αν $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\phi(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Όπως θα δούμε, τανυστικό γινόμενο μεταξύ γραμμικών υπάρχει, είναι μοναδικό (up to isomorphisms) και ικανοποιεί τη λεγόμενη καθολική ιδιότητα.

Υπενθύμιση: Βάση Hamel $X \subseteq E$ ενός γραμμικού χώρου E λέμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του που τον παράγει. Δηλαδή, ένα σύνολο $X = \{x_i : i \in S\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in E$, υπάρχουν πεπερασμένο υποσύνολο $I \subseteq S$, $u(i) \in \mathbb{K}$ και γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $x_i \in X$, $i \in I$, τέτοια ώστε να γράφεται μοναδικά στη μορφή $u = \sum_{i \in I} u(i)\, x_i$.
Κάθε γραμμικός χώρος έχει βάση Hamel (Λήμμα του Zorn).

Παρατήρηση 1.2. *Αν E και F είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι, τότε μπορούμε να τους αναπαραστήσουμε ως χώρους συναρτήσεων πάνω σε κάποια σύνολα. Δηλαδή, υπάρχουν σύνολα S, T τέτοια ώστε $E \hookrightarrow \mathbb{K}^S$ και $F \hookrightarrow \mathbb{K}^T$. Πράγματι, έστω $\{x_i\}_{i \in S}$, $\{y_j\}_{j \in T}$ βάσεις Hamel των E και F αντίστοιχα. Τότε, ορίζουμε την απεικόνιση*

$$u = \sum_{i \in I} u(i)\, x_i \mapsto f_u$$

όπου $f_u : S \to \mathbb{K}$, η συνάρτηση η οποία ικανοποιεί, $f_u(i) = u(i)$ για κάθε $i \in I$ και μηδενίζεται έξω από το I. Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμικός ισομορφισμός του E με κάποιον υπόχωρο του $\mathbb{K}^S$. Ανάλογα ορίζουμε απεικόνιση $v \mapsto g_v$ για $v \in F$.

Θεώρημα 1.3 (Ύπαρξη)**.** *Έστω E και F δύο γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$. Υπάρχει (τουλάχιστον) ένα τανυστικό γινόμενο των E και F.*

Απόδειξη. Ταυτίζοντας τον χώρο E με την εικόνα του στον χώρο $\mathbb{K}^S$, θα θεωρούμε τα στοιχεία του $x \in E$ ως συναρτήσεις $x : S \to \mathbb{K}$. Ομοίως και για τον χώρο F. Ορίζουμε τον χώρο $M = span\{x \otimes y : x \in E, y \in F\} \subseteq \mathbb{K}^{S\times T}$ να είναι η γραμμική θήκη των συναρτήσεων

$$x \otimes y : S \times T \to \mathbb{K}$$
$$(s,t) \mapsto x(s)y(t),$$

και η διγραμμική απεικόνιση να είναι η $\phi : E\times F \to M : (x, y) \to x\otimes y$. Εύκολα ελέγχεται ότι η ϕ είναι διγραμμική και είναι άμεσο επίσης ότι η εικόνα της παράγει τον χώρο. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε τη δεύτερη συνθήκη. Έστω $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, και υποθέτω ότι

$$\sum_{(i,j)\in L} \lambda_{i,j}\phi(x_i, y_j) = \sum_{(i,j)\in L} \lambda_{i,j}x_i \otimes y_j = 0,$$

όπου $L \subseteq I \times J$ πεπερασμένο σύνολο. Τότε έχουμε ότι για κάθε $s \in S$,

$$\sum_{(i,j)\in L} \lambda_{i,j}x_i(s)y_j = \sum_j \Big(\sum_i \lambda_{i,j}x_i(s)\Big)y_j = 0 \quad \text{στον } Y$$

και αφού $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι $\sum_i \lambda_{i,j}x_i(s) = 0$ για κάθε $s \in S$ και για κάθε j. Άρα, έχουμε ότι $\sum_i \lambda_{i,j}x_i = 0$ στον E για κάθε j και αφού και τα $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τελικά $\lambda_{i,j} = 0$ για κάθε ζεύγος (i,j). Επομένως το ζεύγος (M, ϕ) είναι ένα τανυστικό γινόμενο των E, F. □

Πρόταση 1.4. *Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και (M, ϕ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Έστω επίσης $\{x_a : a \in A\} \subseteq E$ και $\{y_b : b \in B\} \subseteq F$ βάσεις Hamel. Τότε, το σύνολο $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$ είναι βάση Hamel του χώρου M.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό, το σύνολο $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι παράγει τον χώρο M, δηλαδή ότι κάθε $u \in M$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$. Πράγματι, έστω $u = \sum_{i=1}^k \phi(z_i, w_i)$ μια αναπαράσταση του u. Για κάθε $i = 1, \ldots, k$, γράφουμε $z_i = \sum_{a\in A'} \lambda_a(z_i)x_a \in E$ όπου $A' \subseteq A$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A και $w_i = \sum_{b\in B'} \mu_b(w_i)y_b \in F$, όπου $B' \subseteq B$ πεπερασμένο υποσύνολο του B και $\lambda_a(z_i), \mu_b(w_i) \in \mathbb{K}$ για κάθε i, a, b. Τότε, λόγω της διγραμμικότητας της ϕ, γράφουμε

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^k \phi(z_i, w_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k \phi\Big(\sum_{a\in A'} \lambda_a(z_i)x_a, \sum_{b\in B'} \mu_b(w_i)y_b\Big) = \\ &= \sum_{a,b}\sum_{i=1}^k \lambda_a(z_i)\mu_b(w_i)\phi(x_a, y_b) = \\ &= \sum_{a,b} v_{a,b}\phi(x_a, y_b) \end{aligned}$$

όπου $v_{a,b} := \sum_{i=1}^k \lambda_a(z_i)\mu_b(w_i)$. □

Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και (M, φ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Αν G ένας άλλος γραμμικός χώρος, τότε κάθε γραμμική απεικόνιση $B : M \to G$ ορίζει μια διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$ μέσω της σχέσης $b(x, y) = B(\varphi(x, y))$. Η καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου, μας λέει ότι όλες οι διγραμμικές απεικονίσεις από το $E \times F$ στο G προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο.

Θεώρημα 1.5 (Καθολική Ιδιότητα)**.** *Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και (M, φ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο G και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : M \to G$ τέτοια ώστε $B(\varphi(x, y)) = b(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in E \times F$. Ισοδύναμα, το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G \\ & M \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $\{x_a : a \in A\}$ και $\{y_b : b \in B\}$ βάσεις Hamel των E και F αντίστοιχα. Όπως είδαμε, το σύνολο $\{\varphi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$ είναι βάση Hamel του χώρου M. Ορίζουμε λοιπόν απεικόνιση $B : M \to G$ με $B(\varphi(x_a, y_b)) := b(x_a, y_b)$ και επεκτείνουμε γραμμικά ώστε

$$B(\sum_{(a,b)\in C} \lambda_{a,b}\varphi(x_a, y_b)) = \sum_{(a,b)\in C} \lambda_{a,b} b(x_a, y_b)$$

για κάθε $C \subseteq A \times B$ πεπερασμένο υποσύνολο. Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη και για κάθε $u = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i, y_i) \in M$ ισχύει ότι $B(u) = \sum_{i=1}^{k} b(x_i, y_i)$. Επιπλέον, είναι μοναδική αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη $B' : M \to G$ με $B'(\varphi(x, y)) = b(x, y)$, τότε $B = B'$ καθώς $B'(\varphi(x, y)) = b(x, y) = B(\varphi(x, y))$ για κάθε $x \in E, y \in F$ και τα $\varphi(x, y)$ παράγουν τον χώρο M. $\square$

Το επόμενο Θεώρημα λέει ότι η καθολική ιδιότητα είναι που χαρακτηρίζει τα τανυστικά γινόμενα. Συγκεκριμένα, κάθε ζεύγος (M', φ'), που ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου για δύο χώρους E, F, είναι ισόμορφο με αυτό.

Θεώρημα 1.6 (Μοναδικότητα)**.** *Έστω (M, φ) ένα τανυστικό γινόμενο των γραμμικών χώρων E και F. Αν (M', φ') ένας γραμμικός χώρος μαζί με μια διγραμμική απεικόνιση $\varphi' : E \times F \to M'$ με την ιδιότητα ότι για κάθε γραμμικό χώρο G και διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : M' \to G$ τέτοια ώστε $b = B \circ \varphi'$, τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $\pi : M \to M'$ ώστε $\pi \circ \varphi = \varphi'$. Ισοδύναμα, το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & E \times F \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ M \arrow[rr, "\pi"] & & M' \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου (M, φ), επιλέγοντας για γραμμικό χώρο $G = M'$ και διγραμμική απεικόνιση $b = \varphi'$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : M \to M'$ τέτοια ώστε $B \circ \varphi = \varphi'$

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M' \\ & M \arrow[u, "B"] \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας και πάλι την καθολική ιδιότητα, αυτή τη φορά για το ζεύγος (M', φ') και επιλέγοντας για γραμμικό χώρο τον $G = M$ και διγραμμική απεικόνιση $b = \varphi$, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B' : M' \to M$ τέτοια ώστε $B' \circ \varphi' = \varphi$

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M' \arrow[d, "B'"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Από τις σχέσεις που προκύπτουν, έχουμε ότι $\varphi' = B \circ \varphi = B \circ (B' \circ \varphi')$, επομένως $\varphi' = (B \circ B') \circ \varphi'$. Όμως, από την καθολική ιδιότητα του ζεύγους (M', φ') για $G = M'$ και διγραμμική απεικόνιση την ίδια την $b = \varphi'$, έπεται ότι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : M' \to M'$ που ικανοποιεί $\varphi' = B \circ \varphi'$ είναι η ταυτοτική, δηλαδή $B = \mathrm{id}_{M'}$. Επομένως, αναγκαστικά πρέπει να έχουμε ότι $(B \circ B') = \mathrm{id}_{M'}$.

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $\varphi = (B' \circ B) \circ \varphi$ απ' όπου συμπεραίνουμε επίσης ότι $B' \circ B = \mathrm{id}_M$. Αυτό σημαίνει ότι οι B' και B είναι η μία αντίστροφη της άλλης και άρα η $\pi := B : M \to M'$ είναι 1-1 και επί. □

Σημείωση 1.7. *Είδαμε λοιπόν ότι ανάμεσα σε δύο γραμμικούς χώρους, όλα τα τανυστικά γινόμενα είναι μεταξύ τους ισόμορφα. Από εδώ και πέρα λοιπόν, το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο M δύο γραμμικών χώρων E και F θα το συμβολίζουμε με $E \otimes F$ και τη διγραμμική απεικόνιση $\varphi : E \times F \to E \otimes F$ με*

$$(x, y) \mapsto x \otimes y.$$

Δηλαδή, το τανυστικό γινόμενο των χώρων E και F, είναι ένας γραμμικός χώρος $E \otimes F$ της μορφής

$$E \otimes F = span\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

που ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα και κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ σε αυτόν τον χώρο έχει μια αναπαράσταση (όχι μοναδική) της μορφής

$$u = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$$

όπου $x_i \in E$ και $y_i \in F$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Κάθε στοιχείο της μορφής $x \otimes y$ ονομάζεται <u>στοιχειώδης τανυστής</u> (elementary tensor) ή <u>απλός τανυστής</u> (simple tensor).

Λήμμα 1.8. *Έστω E, F, M γραμμικοί χώροι και $\phi : E \times F \to M$ μια διγραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Έστω $\{x_i : i = 1, \dots, r\} \subseteq E$ και $\{y_j : j = 1, \dots, s\} \subseteq F$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\phi(x_i, y_j)\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Έστω $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq E$ και $\{y_1, \dots, y_r\} \subseteq F$ δύο πεπερασμένα σύνολα που ικανοποιούν την*
$$\sum_{i=1}^{r} \phi(x_i, y_i) = 0.$$
Τότε, αν $x_1, \dots, x_r$ γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $y_1 = \cdots = y_r = 0$, ενώ αν τα $y_1, \dots, y_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $x_1 = \cdots = x_r = 0$.

Απόδειξη. (1. $\Rightarrow$ 2.) Έστω $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq E$ και $\{y_1, \dots, y_r\} \subseteq F$ πεπερασμένα και έστω ότι τα $x_1, \dots, x_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, αν $\{f_k\}$ μια βάση για τον υπόχωρο $span\{y_i\} \subseteq F$, γράφουμε $y_i = \sum_k \lambda_{i,k} f_k$ και αν υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^{r} \phi(x_i, y_i) = 0$, παίρνουμε $\sum_{i,k} \lambda_{i,k} \phi(x_i, f_k) = 0$. Από υπόθεση λοιπόν $\lambda_{i,k} = 0$ για κάθε i, k και κατά συνέπεια όλα τα y_i είναι ίσα με το μηδέν. Ομοίως αν τα $y_1, \dots, y_r$ είναι γρ. ανεξάρτητα.
(2. $\Rightarrow$ 1.) Έστω $\{x_i : i = 1, \dots, r\} \subseteq E$ και $\{y_j : j = 1, \dots, s\} \subseteq F$ γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα που ικανοποιούν $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} \phi(x_i, y_j) = 0$. Τότε έχουμε ότι $\sum_j \phi(\sum_i \lambda_{i,j} x_i, y_j) = 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\sum_i \lambda_{i,j} x_i = 0$ και άρα $\lambda_{i,j} = 0$ για κάθε i,j λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας.

$\square$

Η προηγούμενη πρόταση μας λέει ότι η δεύτερη συνθήκη στο τανυστικό γινόμενο δύο γραμμικών χώρων μπορεί να αντικατασταθεί με την παραπάνω ισοδύναμη.

Πρόταση 1.9. *Κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ μπορεί να γραφτεί ως ένα πεπερασμένο άθροισμα $u = \sum_i e_i \otimes f_i$ ώστε τα $\{f_i\} \subseteq F$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε τα $\{e_i\} \subseteq E$ καθορίζονται μοναδικά απο τα f_i.*

Απόδειξη. Έστω $u = \sum_k x_k \otimes y_k$ μια αναπαράσταση του u. Θεωρούμε τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $span\{y_k\} \subseteq F$, και παίρνουμε μια βάση του, έστω $\{f_i\}$. Γράφουμε $y_k = \sum_i \lambda_{i,k} f_i$ για κάθε k, όπου $\lambda_{i,k} \in \mathbb{K}$, και τότε

$$\begin{aligned} u = \sum_k x_k \otimes y_k &= \sum_k x_k \otimes (\sum_i \lambda_{i,k} f_i) \\ &= \sum_k \sum_i \lambda_{i,k} (x_k \otimes f_i) \\ &= \sum_i (\sum_k \lambda_{i,k} x_k) \otimes f_i \\ &= \sum_i e_i \otimes f_i \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $e_i := \sum_k \lambda_{i,k} x_k$ για κάθε i. Τέλος, τα e_i είναι μοναδικά καθορισμένα γιατί αν είχαμε $u = \sum_i e_i' \otimes f_i$, τότε $\sum_i (e_i' - e_i) \otimes f_i = 0$ και αφού τα f_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, απο το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι $e_i' = e_i$ για κάθε i. □

Μάλιστα μπορεί κανείς να δείξει το εξής ισχυρότερο.

Πρόταση 1.10. *Έστω E και F δυο γραμμικοί χώροι. Κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $u = \sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i$, όπου $\{v_i : i = 1, \dots, r\}$ και $\{w_i : i = 1, \dots, r\}$ είναι και τα δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση 1.11. *Η καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου $E \otimes F$ μας λέει ότι ο χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων $E \times F \to G$ είναι ισόμορφος με τον χώρο των γραμμικών απεικονίσεων $E \otimes F \to G$,*

$$Bil(E \times F, G) \cong L(E \otimes F, G)$$

Παρατήρηση 1.12 (Γραμμικοποίηση)**.** *Αν θέλουμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση, έστω $\Phi : E \otimes F \to G$, τότε μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε την διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$ και από την καθολική ιδιότητα να έχουμε ότι υπάρχει μοναδική τέτοια Φ ώστε $\Phi(x \otimes y) = b(x, y)$. Η γραμμική απεικόνιση Φ ονομάζεται η γραμμικοποίηση της b.*

Πρόταση 1.13. *Έστω $T_i : E_i \to G_i$, για $i = 1, 2$ γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$\begin{aligned} S : E_1 \otimes E_2 &\to G_1 \otimes G_2 \\ x_1 \otimes x_2 &\mapsto T_1(x_1) \otimes T_2(x_2) \end{aligned}$$

την οποία θα συμβολίζουμε με $S := T_1 \otimes T_2$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $\phi : E_1 \times E_2 \to G_1 \otimes G_2$ με $\phi(x_1, x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$ είναι διγραμμική και κατά συνέπεια από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου $E_1 \otimes E_2$ υπάρχει μοναδική γραμμική S τέτοια ώστε $S(x_1 \otimes x_2) = \phi(x_1, x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$. □

Παραδείγματα 1.14. *1. $E \otimes \mathbb{K} \cong E$*

Πράγματι, μπορούμε να δείξουμε ότι ο χώρος (E, ϕ) με τη διγραμμική απεικόνιση $\phi : E \times \mathbb{K} \to E : (x, \lambda) \mapsto \lambda x$ είναι τανυστικό γινόμενο των E και $\mathbb{K}$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι οι χώροι $E \otimes \mathbb{K}$ και E είναι ισόμορφοι μέσω της απεικόνισης

$$x \otimes \lambda \mapsto \lambda x.$$

2. $E \otimes \mathbb{K}^n \cong E^n$

Μέσω της απεικόνισης $x \otimes (\xi_i)_{i=1}^n \mapsto (x\xi_i)_{i=1}^n$. Έτσι ταυτίζουμε κάθε στοιχείο της μορφής

$x \otimes e_i$, όπου $\{e_i\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{K}^n$, με το διάνυσμα που έχει x στην i-οστή θέση και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Δηλαδή,

$$x \otimes e_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^{nm}$
Μέσω της απεικόνισης $(\xi_i)_{i=1}^n \otimes (\eta_j)_{j=1}^m \mapsto (\xi_i \eta_j)_{i,j=1}^{n,m}$.
4. $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \cong M_{n,m}(\mathbb{K})$
Μέσω της απεικόνισης $e_i \otimes f_j \mapsto E_{i,j}$, όπου οι $\{e_i\}_{i=1}^n$ και $\{f_j\}_{j=1}^m$ είναι οι συνήθεις βάσεις των $\mathbb{K}^n$ και $\mathbb{K}^m$ αντίστοιχα, ενώ $E_{i,j}$ είναι ο $n \times m$ πίνακας με 1 στην (i,j) θεση και 0 οπουδήποτε αλλού.
5. $M_{n,m}(\mathbb{K}) \otimes E \cong M_{n,m}(E)$
Μέσω της απεικόνισης $[a_{i,j}] \otimes x \mapsto [a_{i,j}x]$ όπου $x \in E$ και $a_{i,j} \in \mathbb{K}$.

Άσκηση 1.15. *Έστω K και L συμπαγείς, Hausdorff τοπολογικοί χώροι και $C(K)$, $C(L)$ οι μιγαδικές άλγεβρες των συνεχών συναρτήσεων απο τους K και L αντίστοιχα, με πράξεις κατά σημείο και νόρμες supremum. Δείξτε ότι :*

1. *Ο χώρος $C(K) \otimes C(L)$ είναι πυκνός στον $C(K \times L)$,*

2. *Αν επιπλέον μ, ν κανονικά μέτρα Borel στούς K και L αντίστοιχα, τότε για κάθε $f \in C(K \times L)$ ισχύει*
$$\int_K \int_L f \, d\nu \, d\mu = \int_L \int_K f \, d\mu \, d\nu.$$

2 Τανυστικά Γινόμενα Χώρων Hilbert

Ορισμός 2.1. *Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ χώροι Hilbert. Στον χώρο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ορίζουμε την απεικόνιση*
$$\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \rangle_{hs} := \sum_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w_j \rangle_{\mathcal{K}}.$$
Δηλαδή, αν $h_i \otimes k_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, $i = 1, 2$ έχουμε
$$\langle h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 \rangle_{hs} = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} \langle k_1, k_2 \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Πρόταση 2.2. *Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \times \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ είναι ένα καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.*

Απόδειξη. 1) Sesquilinear: Σταθεροποιούμε δύο στοιχεία $y \in \mathcal{H}$, $w \in \mathcal{K}$ και ορίζουμε την απεικόνιση
$$b_{y,w} : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$
$$(x, z) \mapsto \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \langle z, w \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η $b_{y,w}$ είναι διγραμμική απεικόνιση και κατά συνέπεια από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B_{y,w}$ με

$$\begin{aligned} B_{y,w} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ x \otimes z &\mapsto \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} \langle z, w\rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Επομένως για την $B_{y,w}$ ισχύει ότι αν $u = \sum_i x_i \otimes z_i$ τότε,

$$B_{y,w}(\sum_i x_i \otimes z_i) = \sum_i \langle x_i, y\rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_i \langle x_i \otimes z_i, y \otimes w\rangle_{hs}.$$

Συνεπώς η

$$\langle \cdot\,, y \otimes w\rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

είναι μια καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση για κάθε $y \otimes w \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Τώρα σταθεροποιούμε ένα $u = \sum_i x_i \otimes z_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} c_u : \mathcal{H} \times \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ (y, w) &\mapsto \overline{\sum_i \langle x_i, y\rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w\rangle_{\mathcal{K}}} \end{aligned}$$

και πάλι από την καθολική ιδιότητα, αφού η c είναι διγραμμική (λόγω αντιγραμμικότητας των εσωτερικών γινομένων στη δεύτερη θέση) παίρνουμε την μοναδική γραμμική

$$\begin{aligned} C_u : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ y \otimes w &\mapsto \overline{\sum_i \langle x_i, y\rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w\rangle_{\mathcal{K}}}. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι η

$$\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \cdot\,\rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

είναι μια καλά ορισμένη αντιγραμμική απεικόνιση για κάθε επιλογή στοιχείου $u = \sum_i x_i \otimes z_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Επιπλέον, για κάθε $v = \sum_j y_j \otimes w_j \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j\rangle_{hs} &= \sum_j \langle \sum_i x_i \otimes z_i, y_j \otimes w_j\rangle_{hs} \\ &= \sum_j \sum_i \langle x_i \otimes z_i, y_j \otimes w_j\rangle_{hs} \\ &= \sum_{i,j} \langle x_i, y_j\rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w_j\rangle_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την γραμμικότητα που δείξαμε προηγουμένως. Άρα για κάθε $v = \sum_j y_j \otimes w_j \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, η απεικόνιση

$$\langle \cdot\,, \sum_j y_j \otimes w_j\rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

είναι γραμμική γιατί όπως είδαμε $\langle\,\cdot\,, \sum_j y_j \otimes w_j\rangle_{hs} = \sum_j \langle\,\cdot\,, y_j \otimes w_j\rangle_{hs}$, δηλαδή είναι άθροισμα γραμμικών απεικονίσεων.

2) $\langle u, u\rangle_{hs} \geq 0$: Έστω $u = \sum_i x_i \otimes z_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ και $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ ορθοκανονική βάση του υποχώρου $\operatorname{span}\{z_i\} \subseteq \mathcal{K}$. Τότε, ξέρουμε ότι υπάρχουν μοναδικά ξ_k ώστε το u να γράφεται στη μορφή $u = \sum_k \xi_k \otimes e_k$. Άρα,

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle_{hs} &= \sum_{k,l} \langle \xi_k, \xi_l\rangle_{\mathcal{H}} \langle e_k, e_l\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{k,l} \langle \xi_k, \xi_l\rangle_{\mathcal{H}} \delta_{k,l} \\ &= \sum_{k} \langle \xi_k, \xi_k\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{k} \|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0.\end{aligned}$$

3) Τέλος, από την ίδια σχέση έχουμε ότι $\langle u, u\rangle_{hs} = 0$ ανν $\|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ για κάθε k και συνεπώς $u = \sum_k 0 \otimes e_k = 0$.

□

Ορισμός 2.3. *Ονομάζουμε $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ την πλήρωση του χώρου $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|\cdot\|_{hs} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{hs}^{\frac{1}{2}}$ η νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στην προηγούμενη πρόταση.*

Δηλαδή, ο $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ είναι ένας χώρος Hilbert ο οποίος περιέχει ως πυκνό υπόχωρο το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\cdot\|_{hs}$. Μάλιστα, όπως θα δούμε, το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο περιέχεται πάντοτε ως γνήσιος πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ όταν και οι δύο χώροι είναι απειροδιάστατοι.

Παρατήρηση 2.4. *Παρατηρούμε ότι αν $h \in \mathcal{H}$ και $k \in \mathcal{K}$, τότε*

$$\|h \otimes k\|_{hs}^2 = \langle h \otimes k, h \otimes k\rangle_{hs} = \langle h, h\rangle_{\mathcal{H}} \langle k, k\rangle_{\mathcal{K}} = \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \, \|k\|_{\mathcal{K}}^2 .$$

Δηλαδή, για κάθε απλό τανυστή $h \otimes k$ η νόρμα ικανοποιεί

$$\|h \otimes k\|_{hs} = \|h\|_{\mathcal{H}} \, \|k\|_{\mathcal{K}}$$

και λέμε ότι είναι μια <u>cross-norm</u>.

Άσκηση 2.5. *Αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{H}$ και $\{f_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{K}$ ορθοκανονικές βάσεις, τότε δείξτε ότι το σύνολο $\{e_i \otimes f_j : (i, j) \in I \times J\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$.*

Παρατήρηση 2.6. *Αν έχουμε $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ δύο χώρους Hilbert πεπερασμένης διάστασης με $\dim \mathcal{H} = n$ και $\dim \mathcal{K} = m$, τότε $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ και μάλιστα $\dim \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = mn$.*

Παράδειγμα 2.7. $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \otimes_{hs} \mathbb{C}^m$.

Παρατήρηση 2.8. *Αν $\mathcal{H}$ είναι ένας χώρος Hilbert, ορίζουμε ως $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$ το ευθύ άθροισμα n-αντιγράφων του $\mathcal{H}$ που γίνεται χώρος Hilbert με τη νόρμα $\left\|(h_i)_{i=1}^n\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2$.*

Παράδειγμα 2.9. *$\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathbb{C}^n \cong \mathcal{H}^n$ ισομετρικά. Πράγματι οι χώροι αυτοί γίνονται ισόμορφοι μέσω της απεικόνισης*

$$h \otimes e_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ h \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, $h \otimes e_i \mapsto (h\delta_{i,j})_{j=1}^n$ όπου $\{e_i\}_{i=1}^n$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$. Όμως, κάθε στοιχείο $u \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n$ μπορώ να το γράψω στην μορφή $u = \sum_{i=1}^n h_i \otimes e_i$, και τότε θα έχει νόρμα

$$\left\| \sum_{i=1}^n h_i \otimes e_i \right\|_{hs}^2 = \sum_{i=1}^n \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|(h_i)_{i=1}^n\right\|_2^2,$$

που σημαίνει ότι ο ισομορφισμός είναι ισομετρικός.

Παρατήρηση 2.10. *Παρατηρήστε ότι αν $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ χώροι Hilbert με τον ένα από τους δυο να είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$. Δηλαδή το αλγεβρικό ταυυστικό γινόμενο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ γίνεται αυτομάτως πλήρης χώρος, όταν ο ένας από τους δύο είναι πεπερασμένης διάστασης. Μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο.*

Πρόταση 2.11. *Έστω $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ δύο χώροι Hilbert. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \|\cdot\|_{hs})$ είναι χώρος Hilbert (πλήρης) αν και μόνον αν ο ένας από τους $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ είναι πεπερασμένης διάστασης*

Απόδειξη. Αν ο ένας από τους δύο είναι πεπερασμένης διάστασης, το συμπέρασμα έπεται από το Παράδειγμα 2.9 και την Παρατήρηση 2.10.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτοντας ότι και οι δύο χώροι είναι απειροδιάστατοι, θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο στην πλήρωση $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ το οποίο δεν ανήκει στο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Πράγματι, επιλέγουμε ορθοκανονικές ακολουθίες $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{H}$ και $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{K}$ και θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} e_k \otimes f_k \in \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}.$$

Επειδή όμως

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \|e_k \otimes f_k\|_{hs} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \|e_k\|_{\mathcal{H}} \|f_k\|_{\mathcal{K}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$$

η σειρά συγκλίνει απολύτως, και επομένως συγκλίνει στον χώρο $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ στο στοιχείο $u \in \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$ το οποίο γράφουμε ως

$$u = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} e_k \otimes f_k.$$

Θα δείξουμε ότι $u \notin \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$. Έστω προς άτοπο ότι $u \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$. Άρα,

$$u = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i.$$

Επομένως $u \in \mathcal{H}_0\otimes\mathcal{K}_0$ όπου $\mathcal{H}_0 = span\{x_i : i = 1, \dots, r\}$ και $\mathcal{K}_0 = span\{y_i : i = 1, \dots, r\}$ είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} e_n^* \otimes \mathrm{Id} : \mathcal{H}\otimes\mathcal{K} &\to \mathcal{K} \\ h \otimes k &\mapsto \langle h, e_n\rangle k \end{aligned}$$

(ξεκινώντας από την αντίστοιχη διγραμμική και χρησιμοποιώντας την καθολική ιδιότητα) η οποία είναι καλά ορισμένη και γραμμική. Θα δείξουμε ότι εινα και φραγμένη. Έστω $v \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ ένα στοιχείο το οποίο γράφουμε ως $v = \sum_{m=1}^{M} h_m \otimes k_m$ με $\{k_m\}_{m=1}^{M}$ ορθοκανονικά (όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.2). Τότε

$$\begin{aligned} \left\|e_n^* \otimes \mathrm{Id}(v)\right\|_{\mathcal{K}}^2 &= \left\|\sum_m \langle h_m, e_n\rangle_{\mathcal{H}} k_m\right\|_{\mathcal{K}}^2 \\ &= \langle \sum_m \langle h_m, e_n\rangle_{\mathcal{H}} k_m, \sum_l \langle h_l, e_n\rangle_{\mathcal{H}} k_l\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{m,l} \langle h_m, e_n\rangle_{\mathcal{H}} \langle h_l, e_n\rangle_{\mathcal{H}} \langle k_m, k_l\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_m \langle g_m, e_n\rangle_{\mathcal{H}}^2 \\ &\le \sum_m \|h_m\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|v\|_{hs}^2 . \end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $e_n^* \otimes \mathrm{Id}$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από το $\mathcal{H}\otimes_{hs}\mathcal{K}$ στον $\mathcal{K}$. Τέλος, παρατηρήστε ότι αφού $u = \sum_i x_i \otimes y_i$

$$e_n^* \otimes \mathrm{Id}(u) = \sum_i \langle x_i, e_n\rangle y_i \in \mathcal{K}_0$$

για κάθε n. Όμως επίσης $u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e_k \otimes f_k$ άρα από συνέχεια,

$$e_n^* \otimes \mathrm{Id}(u) = \frac{1}{n^2} f_n.$$

Δηλαδή, $f_n \in \mathcal{K}_0$ για κάθε n. Το οποίο είναι άτοπο γιατί τότε ο $\mathcal{K}_0$ θα έπρεπε να περιέχει την άπειρη ορθοκανονική ακολουθία $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ενώ είναι πεπερασμένης διάστασης. Συνεπώς $u \notin \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$.

□

Άσκηση 2.12. *Δείξτε ότι* $\ell^2(\Gamma) \otimes_{hs} \ell^2(\Delta) \cong \ell^2(\Gamma \times \Delta)$.

Άσκηση 2.13. *Αν* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, δείξτε ότι* $L^2(\mu) \otimes_{hs} L^2(\nu) \cong L^2(\mu \times \nu)$.

Άσκηση 2.14 (Schmidt Decomposition). *Έστω $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ δύο χώροι Hilbert και $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Τότε, υπάρχει $K \in \mathbb{N}$, ορθοκανονικά σύνολα $\{e_k : k = 1, \dots, K\} \subseteq \mathcal{H}$, $\{f_k : k = 1, \dots, K\} \subseteq \mathcal{K}$ και θετικοί αριθμοί $\{s_k : k = 1, \dots, K\}$ έτσι ώστε*

$$u = \sum_{k=1}^{K} s_k e_k \otimes f_k$$

και $\|u\|_{hs}^2 = \sum_{k=1}^{K} s_k^2$.

3 Τανυστικά Γινόμενα Χώρων Τελεστών

Είχαμε δεί ότι αν έχουμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $T_i : E_i \to G_i$, $i = 1, 2$ μεταξύ γραμμικών χώρων, μπορούμε να ορίσουμε μοναδική γραμμική απεικόνιση $S : E_1 \otimes E_2 \to G_1 \otimes G_2$ με $S(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$ την οποία συμβολίσαμε με $S := T_1 \otimes T_2$. Θα δούμε τώρα ότι αν οι γραμμικές απεικονίσεις μας είναι φραγμένοι τελεστές σε χώρους Hilbert τότε και η μοναδική αυτή γραμμική απεικόνιση επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον χώρο Hilbert τανυστικό γινόμενο που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ φραγμένοι τελεστές. Τότε, η γραμμική απεικόνιση $T \otimes S : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} : h \otimes k \mapsto T(h) \otimes S(k)$ επεκτείνεται μοναδικά σε φραγμένο τελεστή*

$$T \otimes_{sp} S : \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$$

με νόρμα $\left\|T \otimes_{sp} S\right\| = \|T\| \|S\|$.

Απόδειξη. Εφοδιάζουμε τον χώρο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ με την νορμα $\|\cdot\|_{hs}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι ο τελεστής $T \otimes S : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} : h \otimes k \mapsto T(h) \otimes S(k)$ είναι φραγμένος και έπειτα θα επεκτείνουμε στην πλήρωση λόγω συνέχειας.

Έστω $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}$ ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(h \otimes k) = Th \otimes k$. Έστω ένα στοιχείο $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ με αναπαράσταση $u = \sum_i x_i \otimes z_i$, τότε υπάρχουν μοναδικά $\{h_k\} \subseteq \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $u = \sum_k h_k \otimes e_k$ όπου $\{e_k\} \subseteq \mathcal{K}$ ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathrm{span}\{z_i\} \subseteq \mathcal{K}$. Έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned}
\|u\|_{hs}^2 &= \left\|\sum_k h_k \otimes e_k\right\|_{hs}^2 \\
&= \sum_{k,l} \langle h_k, h_l \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_k, e_l \rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \sum_k \langle h_k, h_k \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_k \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\left\| T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}} (\sum_k h_k \otimes e_k) \right\|_{hs}^2 &= \left\| \sum_k Th_k \otimes e_k \right\|_{hs}^2 \\
&= \sum_k \|Th_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \sum_k \|T\|^2 \, \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|T\|^2 \sum_k \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|T\|^2 \left\| \sum_k h_k \otimes e_k \right\|_{hs}^2 .
\end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση έπεται ότι ο τελεστής $T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}$ είναι φραγμένος με

$$\|T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}\| \leq \|T\| .$$

Με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι και ο τελεστής $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S$ είναι φραγμένος, με νόρμα

$$\|\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S\| \leq \|S\| .$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $T \otimes S = (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)$. Πράγματι, για κάθε απλό τανυστή $h \otimes k$ ισχύει ότι

$$(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)(h \otimes k) = (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}})(h \otimes Sk) = Th \otimes Sk$$

και άρα έχουμε την ισότητα από τη μοναδικότητα της γραμμικής απεικόνισης. Άρα, ο $T \otimes S$ είναι επίσης φραγμένος ως τελεστής στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ (εφοδιασμένο με τη νόρμα $\| \cdot \|_{hs}$) με νόρμα που ικανοποιεί

$$\|T \otimes S\| = \|(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}})(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)\| \leq \|(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}})\| \, \|(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)\| \leq \|T\| \, \|S\| .$$

Από συνέχεια λοιπόν, επεκτείνεται σε μοναδικό φραγμένο τελεστή στην πλήρωση $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$, τον οποίο και συμβολίζουμε με $T \otimes_{sp} S$. Τέλος, αν πάρουμε $h \in \mathcal{H}$ και $k \in \mathcal{K}$ ώστε $\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ και $\|k\|_{\mathcal{K}} \leq 1$, τότε

$$\left\| T \otimes_{sp} S \right\| \geq \left\| (T \otimes_{sp} S)(h \otimes k) \right\|_{hs} = \|Th \otimes Sk\|_{hs} = \|Th\|_{\mathcal{H}} \, \|Sk\|_{\mathcal{K}} ,$$

και αφού τα $h \in \mathcal{H}$ και $k \in \mathcal{K}$ ήταν τυχαία, προκύπτει ότι $\left\| T \otimes_{sp} S \right\| \geq \|T\| \, \|S\|$. □

Πρόταση 3.2. *Αν $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ χώροι Hilbert, τότε η απεικόνιση*

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K})$$

$$T \otimes S \mapsto T \otimes_{sp} S$$

είναι 1-1.

Απόδειξη. Το ότι η απεικόνιση Φ είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται από την Πρόταση 3.1 και την καθολική ιδιότητα. Πράγματι, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{K}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}) \\ (T, S) &\mapsto T \otimes_{sp} S \end{aligned}$$

είναι διγραμμική, καλά ορισμένη γιατί ορίζεται μοναδικός τελεστής $T \otimes_{sp} S$ και συνεπώς από την καθολική ιδιότητα υπάρχει μοναδική γραμμική

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}).$$

Για το 1-1, έστω $\sum_i T_i \otimes S_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε τα S_i να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και υποθέτουμε ότι $\sum_i T_i \otimes_{sp} S_i = 0$. Έστω $h \in \mathcal{H}$ και επιλέγω $\{e_j\} \subseteq \mathcal{H}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathrm{span}\{T_i(h)\} \subseteq \mathcal{H}$. Τότε, για κάθε i γράφουμε $T_i(h) = \sum_j \lambda_{i,j} e_j$, και αν $k \in \mathcal{K}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\sum_i T_i \otimes_{sp} S_i\Big)(h \otimes k) \\ &= \sum_i T_i h \otimes S_i k \\ &= \sum_i \Big(\sum_j \lambda_{i,j} e_j\Big) \otimes S_i k \\ &= \sum_j e_j \otimes \Big(\sum_i \lambda_{i,j} S_i k\Big) \end{aligned}$$

και από την γραμμική ανεξαρτησία των e_j έχουμε ότι $\sum_i \lambda_{i,j} S_i k = 0$ για κάθε $k \in \mathcal{K}$ και για κάθε j. Συνεπώς $\sum_i \lambda_{i,j} S_i = 0$ απ' όπου συμπεραίνουμε (λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των S_i) ότι $\lambda_{i,j} = 0$ για κάθε i, j και άρα τελικά $T_i(h) = 0$. Το $h \in \mathcal{H}$ ήταν τυχόν και τελικά προκύπτει ότι $T_i = 0$ για κάθε i και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.3. *Από την εμφύτευση του χώρου αλγεβρικό ταυνστικό γινόμενο $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ στην C^*-άλγεβρα των φραγμένων τελεστών στον χώρο Hilbert $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$, μπορούμε να ορίσουμε την νόρμα $\|\cdot\|_{sp}$ στον $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ θέτοντας*

$$\Big\|\sum_i T_i \otimes S_i\Big\|_{sp} := \Big\|\sum_i T_i \otimes_{sp} S_i\Big\|.$$

Ορίζουμε λοιπόν το <u>spatial</u> ταυνστικό γινόμενο ως

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes_{sp} \mathcal{B}(\mathcal{K}) := \overline{\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})}^{\|\cdot\|_{sp}}$$

και μάλιστα η $\|\cdot\|_{sp}$ είναι μια cross-norm.

Παρατήρηση 3.4. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο μιγαδικές $*$-άλγεβρες με μονάδες, τότε μπορούμε να μετατρέψουμε και το $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σε $*$-άλγεβρα με μονάδα, ορίζοντας τον πολλαπλασιασμό και την ενέλιξη ως εξής:*

1. $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) := ac \otimes bd$

2. $(a \otimes b)^* := a^* \otimes b^*$

(και επεκτείνοντας γραμμικά). Επιπλέον, η μονάδα θα είναι η $\mathbf{1}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} := \mathbf{1}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$.

Άσκηση 3.5. *Ελέγξτε ότι οι παραπάνω πράξεις του πολλαπλασιασμού και της ενέλιξης, στον χώρο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ όπου $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι *-άλγεβρες, είναι καλά ορισμένες.*

Ορισμός 3.6. *Αν έχουμε $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο C^*-άλγεβρες με μονάδες, μια νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ στην $*$-άλγεβρα $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ θα ονομάζεται <u>C^*-cross-norm</u>, αν είναι cross-norm και επιπλέον ικανοποιεί τα*

$$\|x^*x\|_\gamma = \|x\|_\gamma^2 \quad \text{και} \quad \|xy\|_\gamma \leq \|x\|_\gamma \|y\|_\gamma$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Η πλήρωση της $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ γίνεται C^*-άλγεβρα που τη συμβολίζουμε με $\mathcal{A} \otimes_\gamma \mathcal{B}$.

Άσκηση 3.7. *Εφοδιάζουμε το αλγεβρικό ταυνυστικό γινόμενο $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ με ενέλιξη και πολλ/σμό όπως παραπάνω. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}) \\ T \otimes S &\mapsto T \otimes_{sp} S \end{aligned}$$

είναι 1-1 μορφισμός $*$-αλγεβρών και η νόρμα $\|\cdot\|_{sp}$ είναι μια C^*-cross-norm.

*Συμπεράνετε ότι το spatial ταυνυστικό γινόμενο $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes_{sp} \mathcal{B}(\mathcal{K})$ είναι μια κλειστή *-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K})$, επομένως είναι C^*-αλγεβρα.*

Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να μετατρέψουμε τον χώρο $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ σε C^*-άλγεβρα, εφοδιάζοντας τον με νόρμα τελεστή μέσα από τον $*$-ισομορφισμό

$$M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n),$$

όπου απεικονίζουμε κάθε πίνακα με στοιχεία τελεστές στον $\mathcal{H}$ σαν τελεστές στον χώρο $\mathcal{H}^n$.

Άσκηση 3.8. *Δείξτε ότι η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \Psi : M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) &\to M_n \otimes_{sp} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ [T_{i,j}] &\mapsto \sum_{i,j} E_{i,j} \otimes T_{i,j}. \end{aligned}$$

είναι ένας $*$-ισομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών, και κατά συνέπεια είναι και ισομετρικός.

Αναφορές

[1] Αριστείδης Κατάβολος, 'Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων και χώρων Hilbert,' eclass, 2019-20. [Online]. Available: https://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

[2] Ryan, Raymond, Introduction to Tensor Products of Banach Spaces. Springer-Verlag London, Jan 2002.

[3] F. Treves, Topological vector spaces, distributions and kernels. Academic Press, 1967.

[4] A. Defant and K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals. North Holland, Nov 1992.

[5] J. Ringrose and R. Kadison, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I: Elementary Theory, ser. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, July 1997.

[6] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory. Academic Press, 1990.