

EOQ model

1 προϊόν, Ζήτηση α / μον. χρ. πρώτῃ και σταθερή

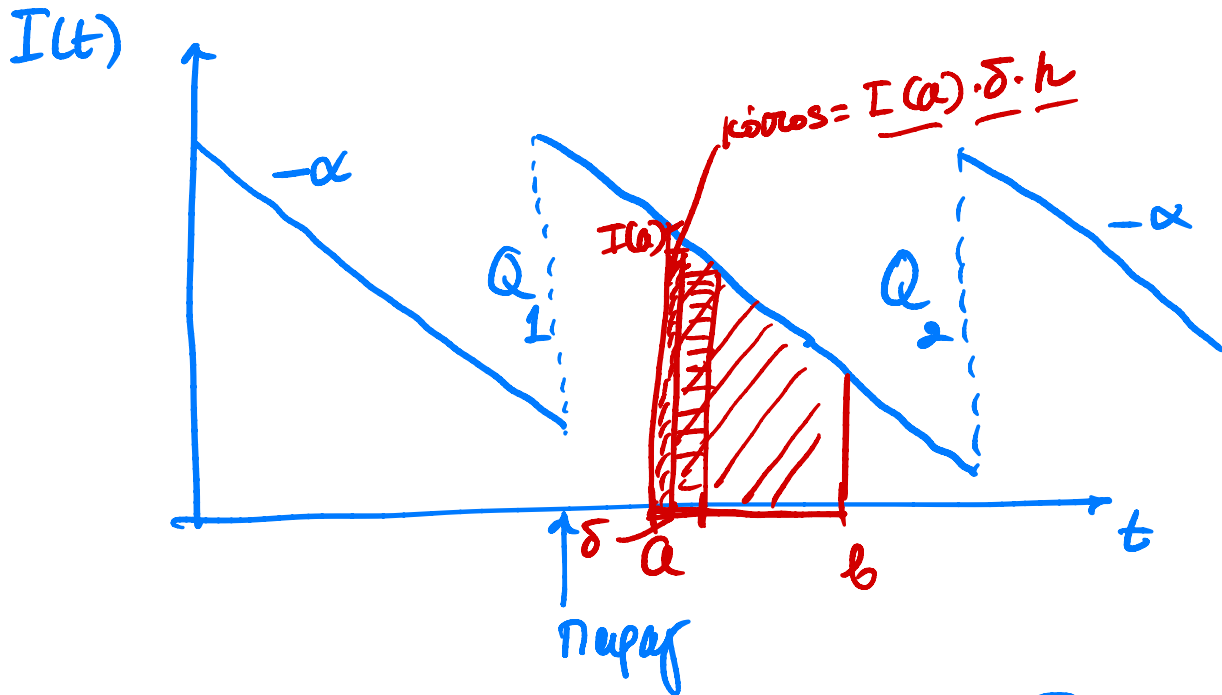
K = σταθερό κόστος παραγγελίας (ανεξ. μεθόδους)

h = κόστος αποθήκευσης / μον. ηρ. μον. χρόνου

c = κόστος αγοράς ή παραγωγής / μον. προϊόντος

Lead-time = 0

Ελαχ. Μέσο κόστος / μον. χρόνου



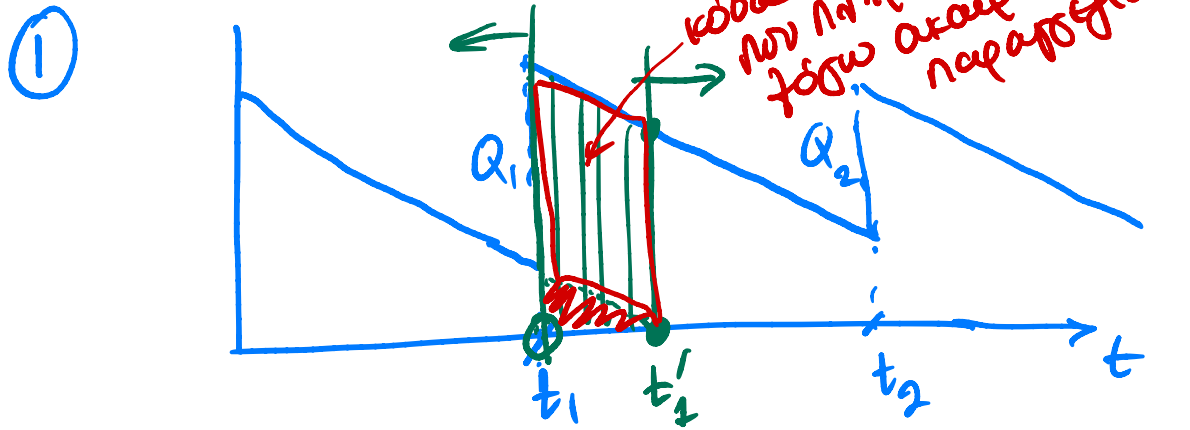
Συνολικό κόστος αποθήκευσης στο διάστημα $[a, b]$

$$C_{\text{ανθ}}(a, b) = h \int_a^b I(t) dt$$

Μέσο ύψος αποθέματος στο (a, b) :

$$\bar{I}(a, b) = \frac{\int_a^b I(t) dt}{b-a}$$

Πολιτική Παραγγελιών

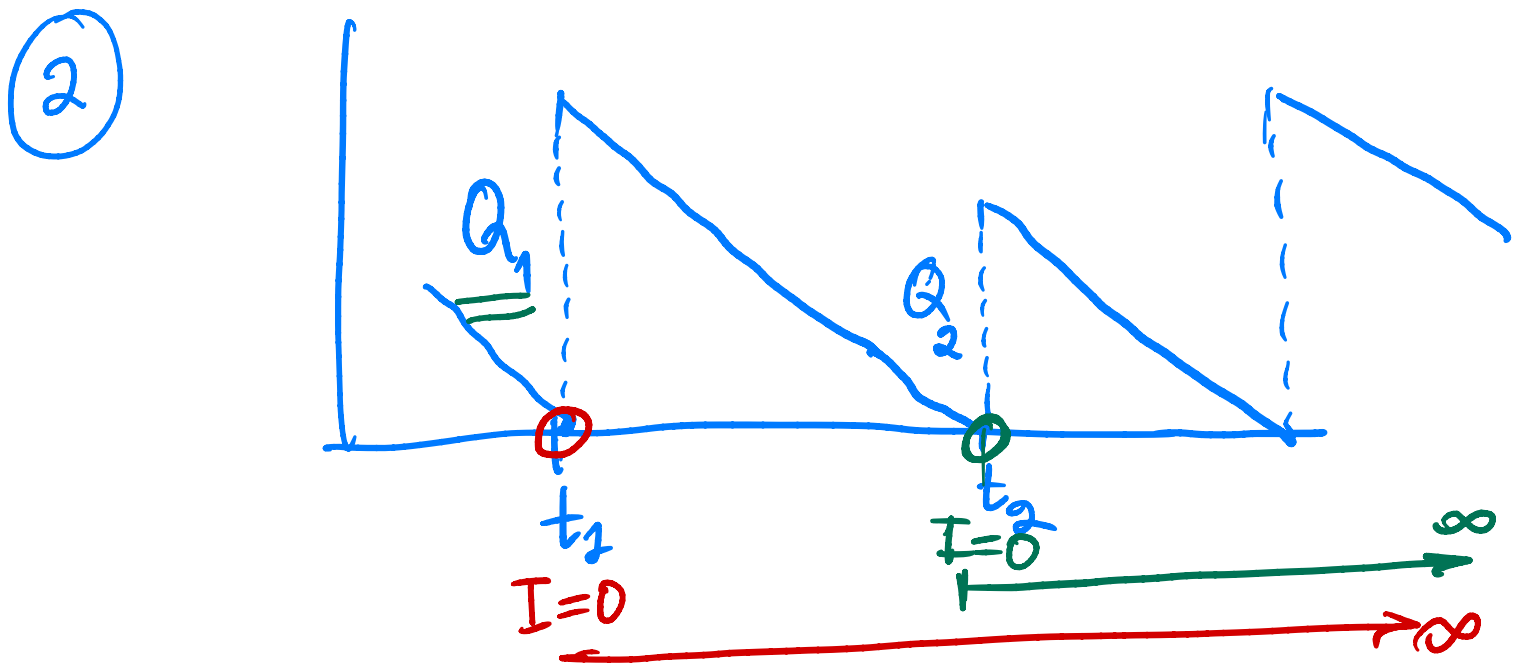


Ιδιότητα Μηδενικού Αποθέματος

Παραγγελίες γίνονται μόνο σε στιγμές μηδενισμού του αποθέματος

Αν $Q(t)$: παραγγελία τη στιγμή t

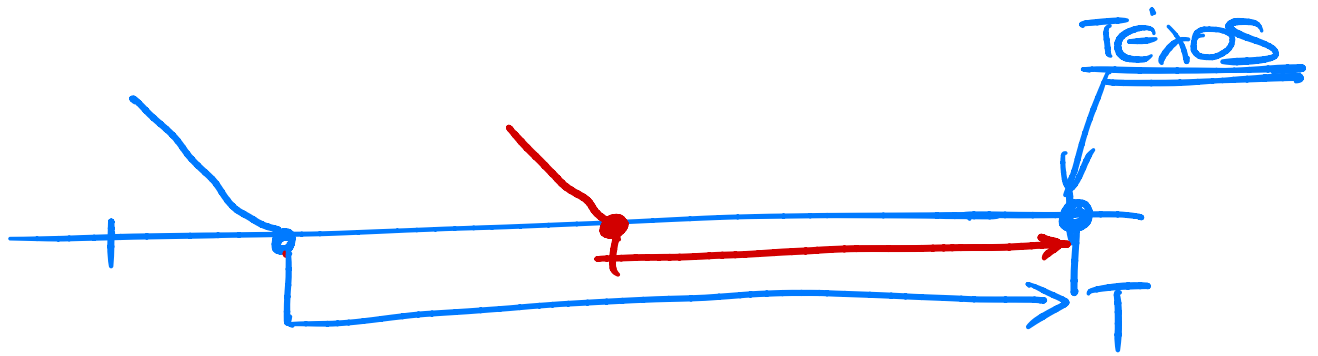
$I(t) \cdot Q(t) = 0$ για κάθε t .



Στάσιμη Πολιτική

Ίδια ποσότητα παραγγελίας κάθε φορά.

Προσοχή! Για πεπερ. ορίζοντα:



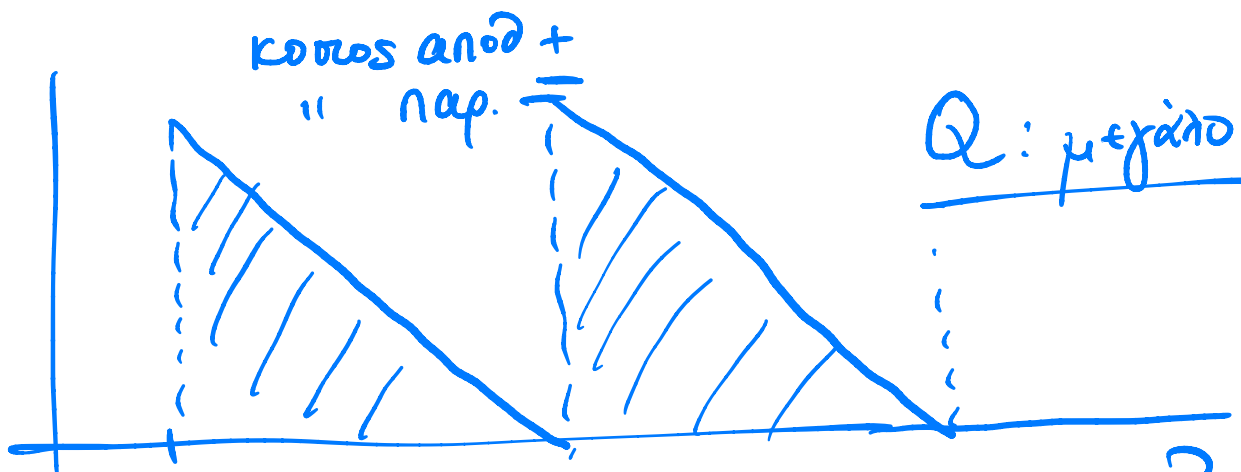
Από ιδιότητες 1. κ' 2 μια λογική
 χαρακτηρίζεται μόνο από $Q =$ ποσότητα παραγγ.
 " Κάθε φορά που μηδενίζεται το απόθεμα
 κάνουμε παραγγελία μεγέθους Q "]

Πόσο πρέπει να είναι το Q ?



κόστος αποθ -
 " παραγγ +

Q : μικρό



κόστος αποθ +
 " παρ. -

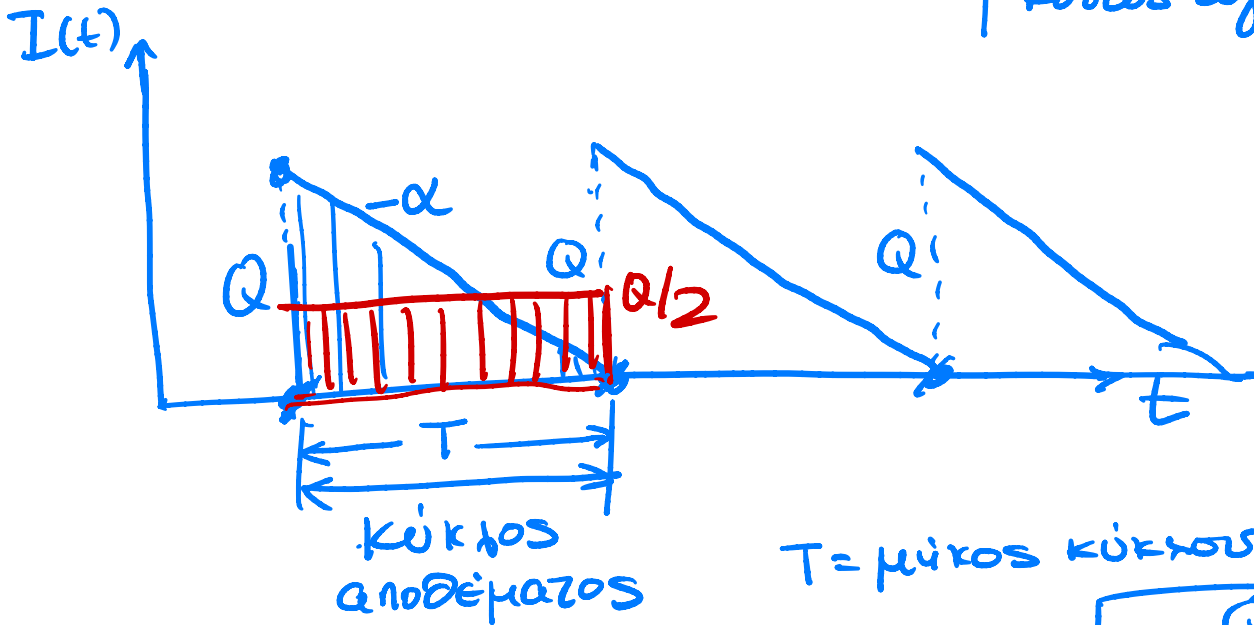
Q : μεγάλο

Q^* : βέλτιστο = ?

Συνάρτηση Κόστους

$$C(Q) = \text{μείρο κόστους / μέρ. χρόνου}$$

Κόστος παραγγελιών
 Κόστος αποθήκευσης
 Κόστος αγοράς

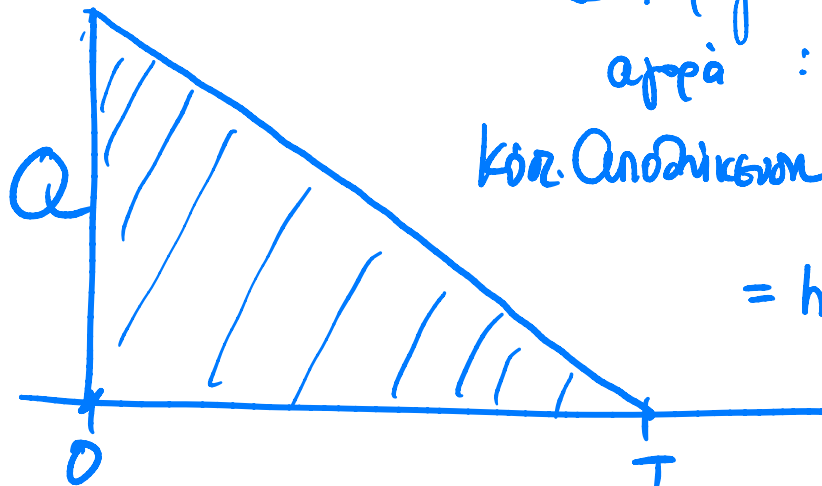


$$T = \text{μίκρος κύκλος}$$

$$Q = \alpha \cdot T \Rightarrow \boxed{T = \frac{Q}{\alpha}}$$

$$C(Q) = \frac{\text{Κόστος κύκλου}}{\text{Μίκρος κύκλος}}$$

Κόστος κύκλου



1 παραγ. : K
 αγορ. : c · Q

$$\text{Κόστ. Αποθήκευσης} = h \cdot \text{Εμβα.}$$

$$= h \cdot \frac{T \cdot Q}{2} = h \cdot \frac{Q^2}{2\alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Κόστος κύκλου} = K + c \cdot Q + h \frac{Q^2}{2\alpha} \\ \text{Μίκρος " } = T = Q/\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow C(Q) = \frac{K\alpha}{Q} + \frac{1}{2}hQ + c\alpha$$

$$C(Q) = \frac{K\alpha}{Q} + \frac{1}{2}hQ + c\alpha$$

παρ.
απόθ
αγοράς
/ μ.χρ.

← min C(Q)
Q

$$\frac{\alpha}{Q} = \text{αρ. παραγ} / \text{μ.χρ.} \quad (\text{π.χ. } \alpha = 1000 \text{ μ.χρ./έτος})$$

$$Q = 100$$

$$\frac{\alpha}{Q} = 10 \text{ παρ./έτος}$$

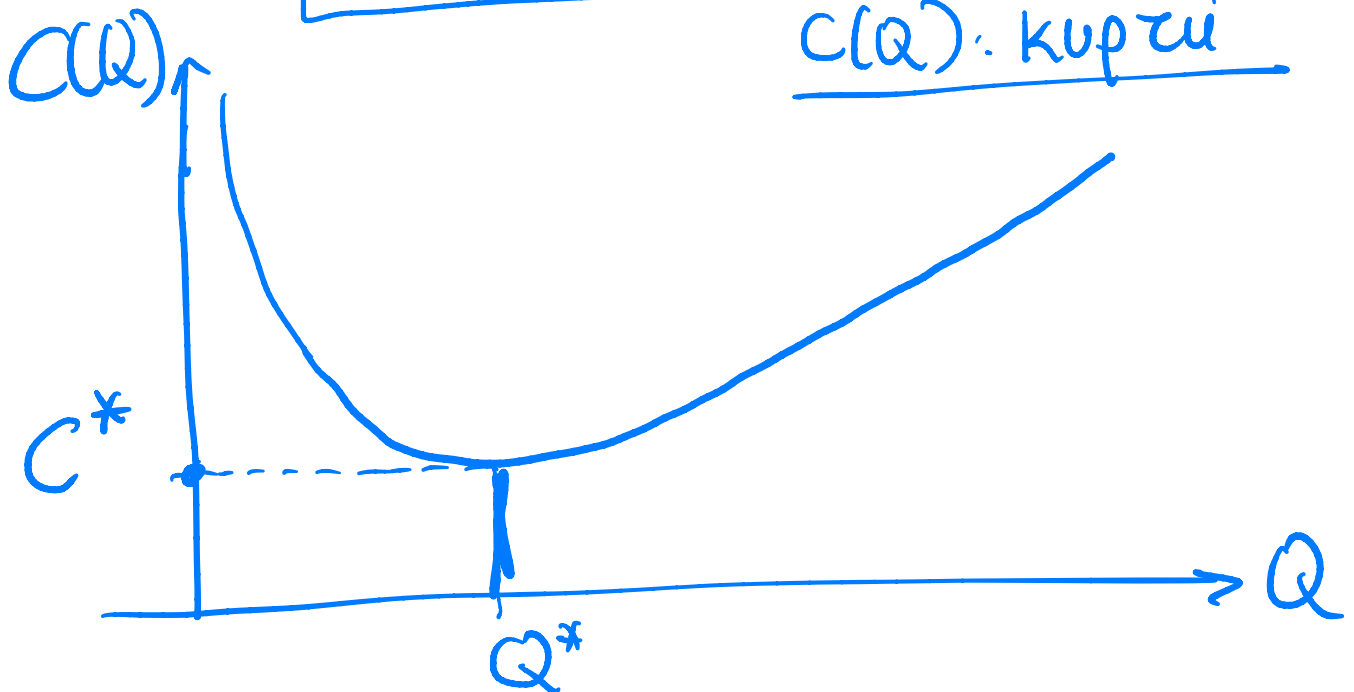
$$\underline{c\alpha} = \text{κόστος αγοράς} / \text{μ.χρ.} = (\text{ανεξ. τω } Q).$$

$$\frac{1}{2}Q : \text{μίσθ απόθεμα}, \quad h \cdot \frac{Q}{2} : \text{κόστος απόθ} / \text{μ.χρ.}$$

$$C(Q) = \frac{K\alpha}{Q} + \frac{1}{2}hQ + c\alpha$$

$$C'(Q) = -\frac{K\alpha}{Q^2} + \frac{1}{2}h, \quad C''(Q) = \frac{2K\alpha}{Q^3} > 0$$

C(Q): κυρτή



$$C'(Q) = -\frac{K\alpha}{Q^2} + \frac{1}{2}h = 0 \Rightarrow \boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}}}$$

EOQ formula

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}} = \text{Economic Order Quantity}$$

$$C^* = C(Q^*) = \dots = \boxed{\sqrt{2K\alpha h} + c\alpha = C^*}$$

Παρατηρήσεις

① Q^* εξαρτάται μόνο από το λόγο $\frac{K}{h}$

$$K \uparrow \Rightarrow Q^* \uparrow \quad T \uparrow$$

$$h \uparrow \Rightarrow Q^* \downarrow \quad T \downarrow$$

$$② \quad T = \frac{Q^*}{\alpha} = \sqrt{\frac{2K}{\alpha h}}$$

$\alpha \uparrow \Rightarrow Q \uparrow, T \downarrow$ [και μεγαλύτερες και συχνότερες παραγ.]

Εφαρμογή Εταιρεία διακινεί προϊόν

Ζήτηση 2500 kg/έτος

Σταθ. κόστος παραγ. = $100^{\text{€}}$ /παραγ.

Κόστος αποθμκ = $2^{\text{€}}$ /kg, έτος

" αχρεΐς = $4^{\text{€}}$ /kg

Η εταιρεία ακολουθεί ποδιστική παραγ. $Q=1000$

Consultant: Αν μπορεί να βελτιώσει τα κόστη
και πόσο

Μαρέλο
EOQ $\alpha = 2500$
 $K = 100$
 $h = 2$
 $c = 4$

① Σημερινά κόστη / έτος

$Q=1000$,

$$C(Q) = \frac{K\alpha}{Q} + \frac{1}{2} hQ + c\alpha = \frac{100 \cdot 2500}{1000} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 2500$$

$$= 250 + 1000 + 10000 = 1250 + 10000$$

$$= \underline{\underline{11250}} \text{ / έτος}$$

② Consultant: Βέλτιστη ποσότητα $Q^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{h}}$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2k\alpha}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 2500}{2}} = 10 \cdot 50 = \underline{\underline{500}} \quad (\neq 1000)$$

κόστος κάθε χρόνο Q^*

$$C^* = \sqrt{2k\alpha h} + c\alpha = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 2500 \cdot 2} + 10000$$

$$= 1000 + 10000 = \underline{\underline{11000}}$$

Εξοικονόμηση 250 €/έτος

Ποσοστά βελτίωσης

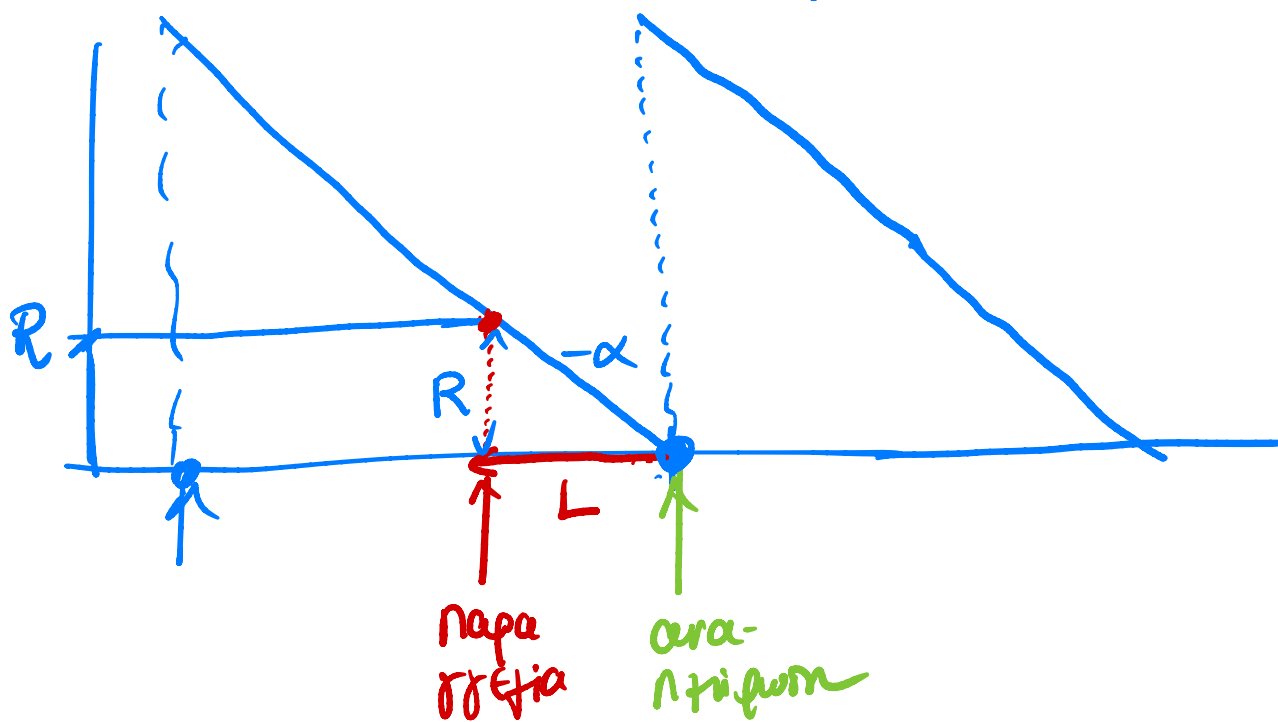
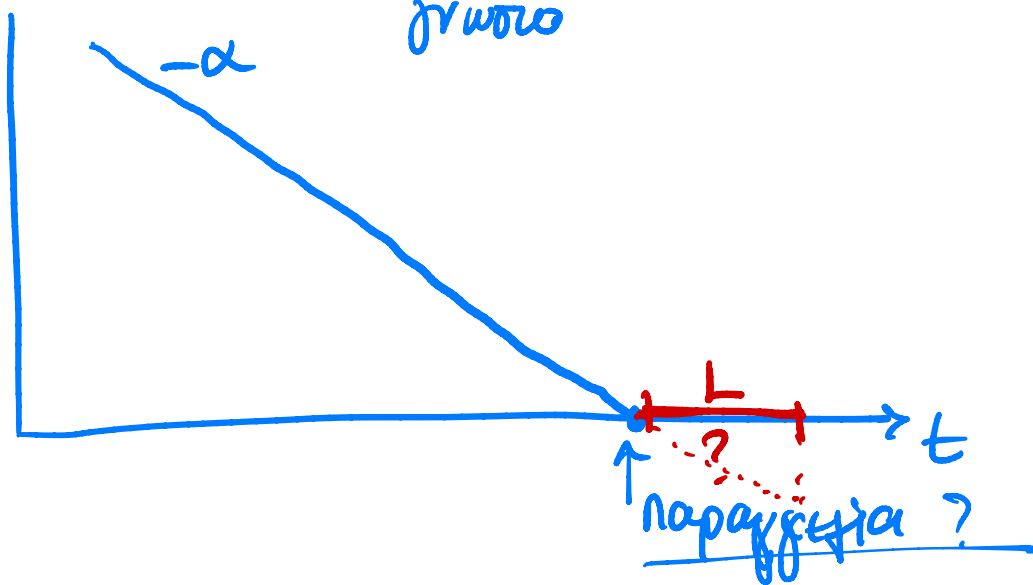
$$\% \text{ μείωσ.} = \frac{\text{Αρχ-Τελικό}}{\text{Αρχικό}} = \frac{250}{11250} = \underline{\underline{2,2\%}}$$

Αν θεωρήσουμε μίσθιο τα κόστη διαχ. ανάω.

$$\% \text{ μείωσ.} = \frac{1250 - 1000}{1250} = \frac{250}{1250} = \textcircled{20\%}$$

Επεκτάσεις Μοντέλου ΕΟQ

① $Lead\ Time = L$ (χρόνος παράδοσης παραγγελίας)
 ↑ γνωστό



Υλοποίηση: ① Παραγγελία Q , L χρόνο πριν τελειώσει το απόθεμα.

② R : ύψος αποθ. τη στιγμή της παραγγελίας

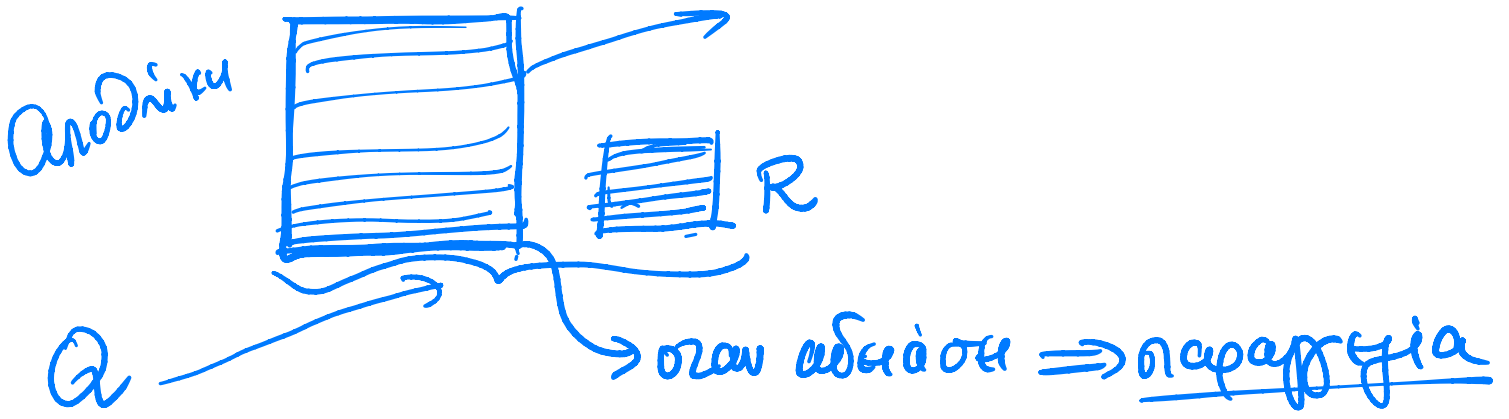
$R = \text{ποσότητα παραγγελιών σε χρόνο } L = \alpha \cdot L$

R : reorder point

Πολιτική (R, Q)

Όταν το απόθεμα γίνει R , παραγγελία Q

Two-bin system

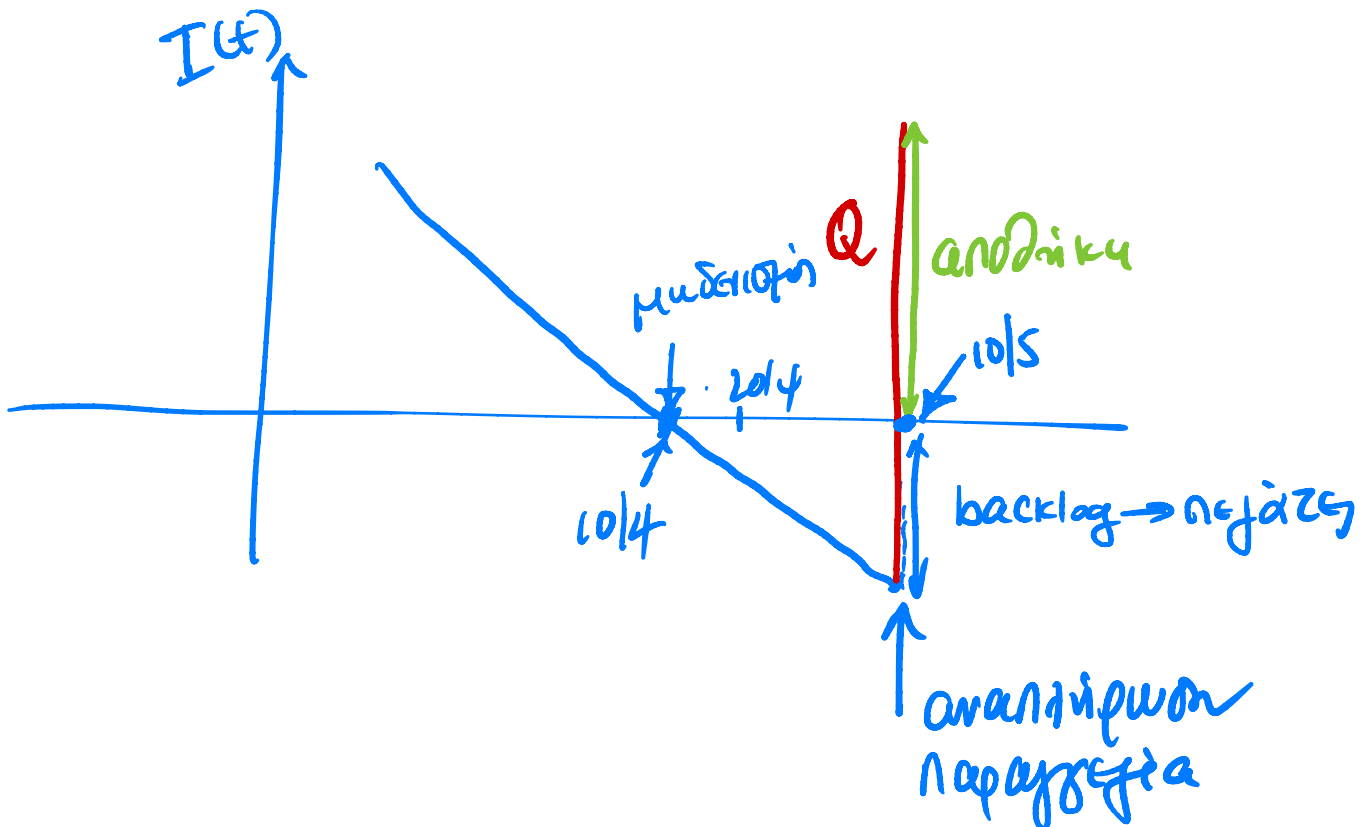


② EOQ με προγραμματισμένες ετήσιες (backlog)

Υπόθεση αρχικού μοντέλου ($L=0$)

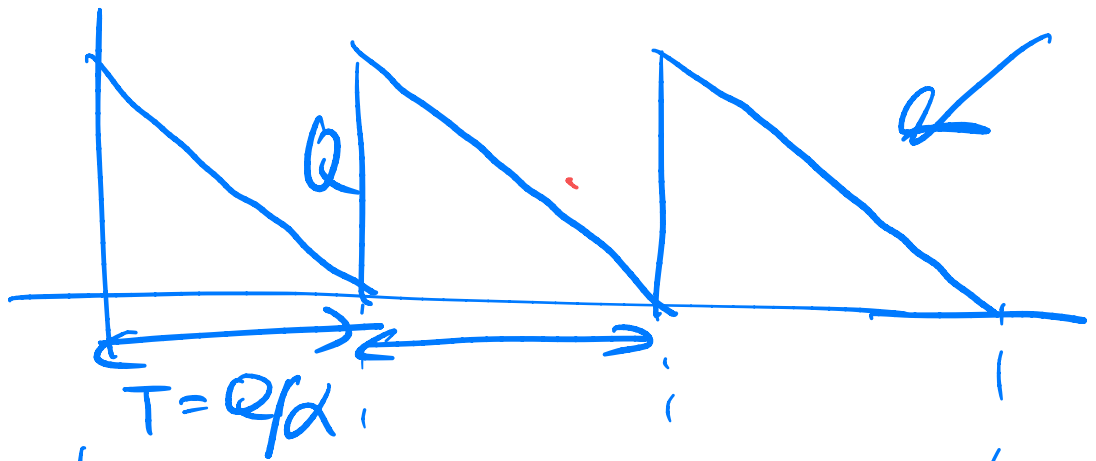
Επηρεάζει backlog (αρνητικό: εκτελεστές απόθεμα προς πώληση)

$p = \text{κόστος backlog} / \text{μην. πρ. μην. χρόνου}$

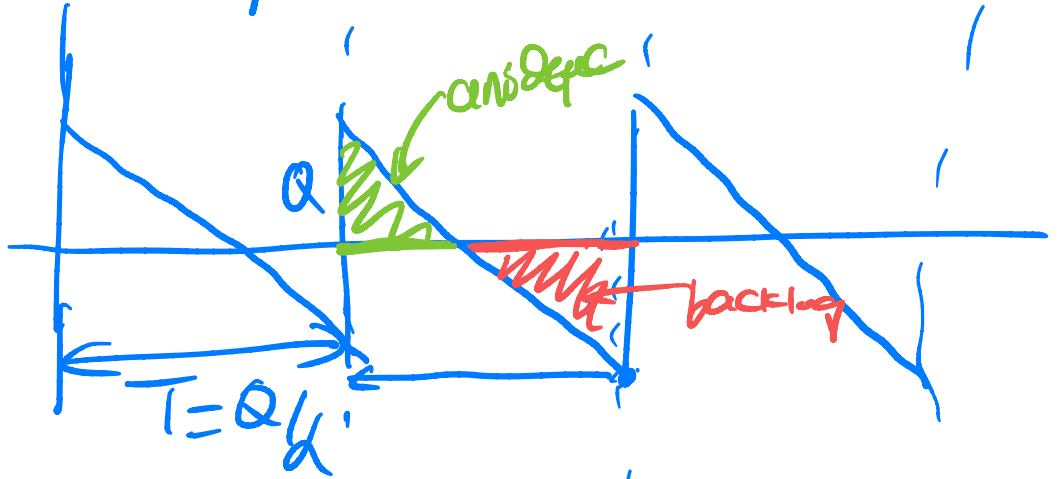


(a) no backlog

είναι από το παζί

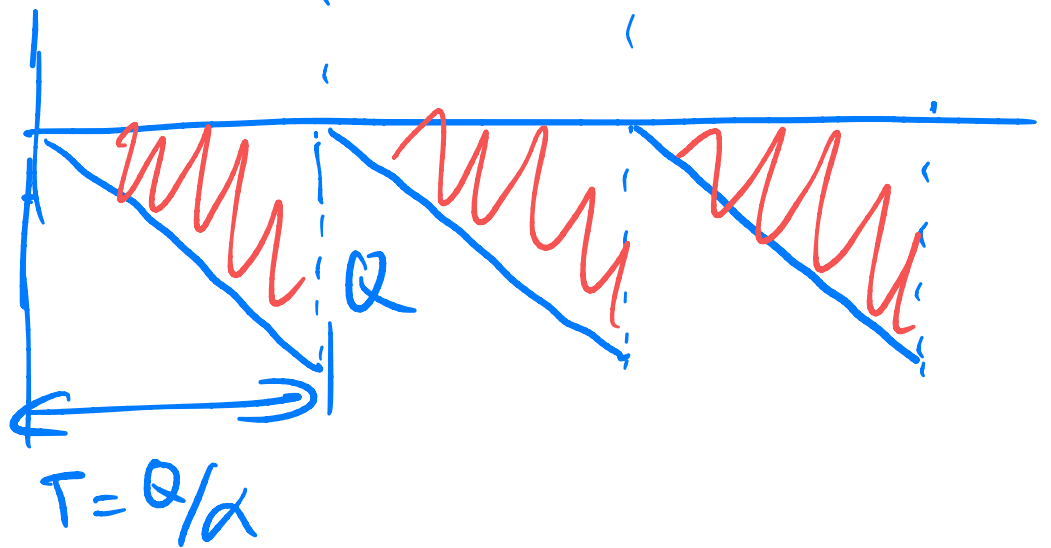


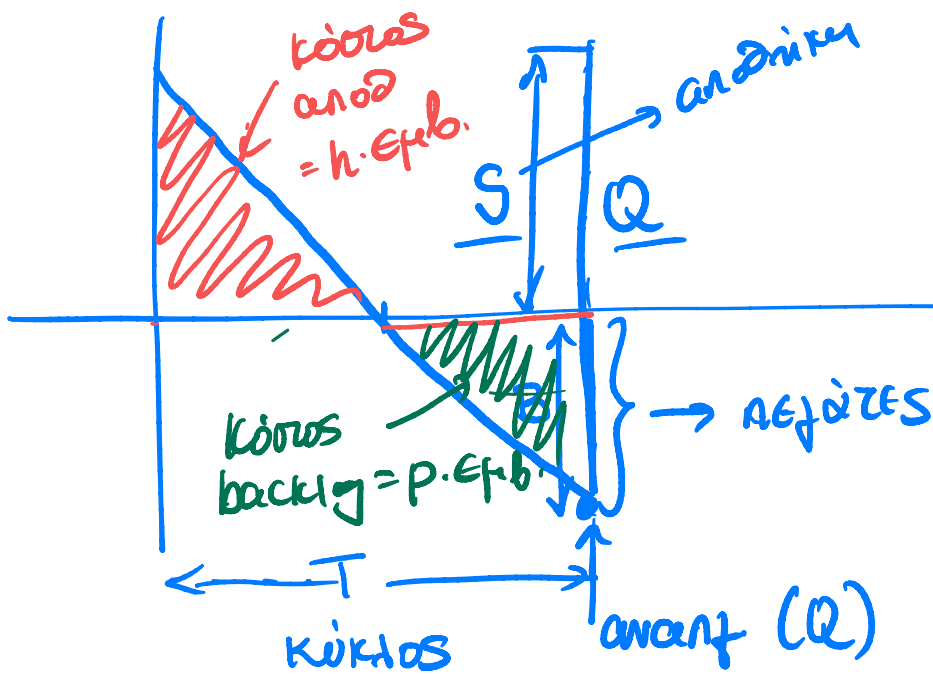
(b)



(c) no inventory

(είναι από backlog)





$Q = \text{ποσότητα παραγγελίας}$
 $S = \text{μέγιστο ύψος αποθήκης}$

$$B = Q - S$$

= μέγιστο backlog

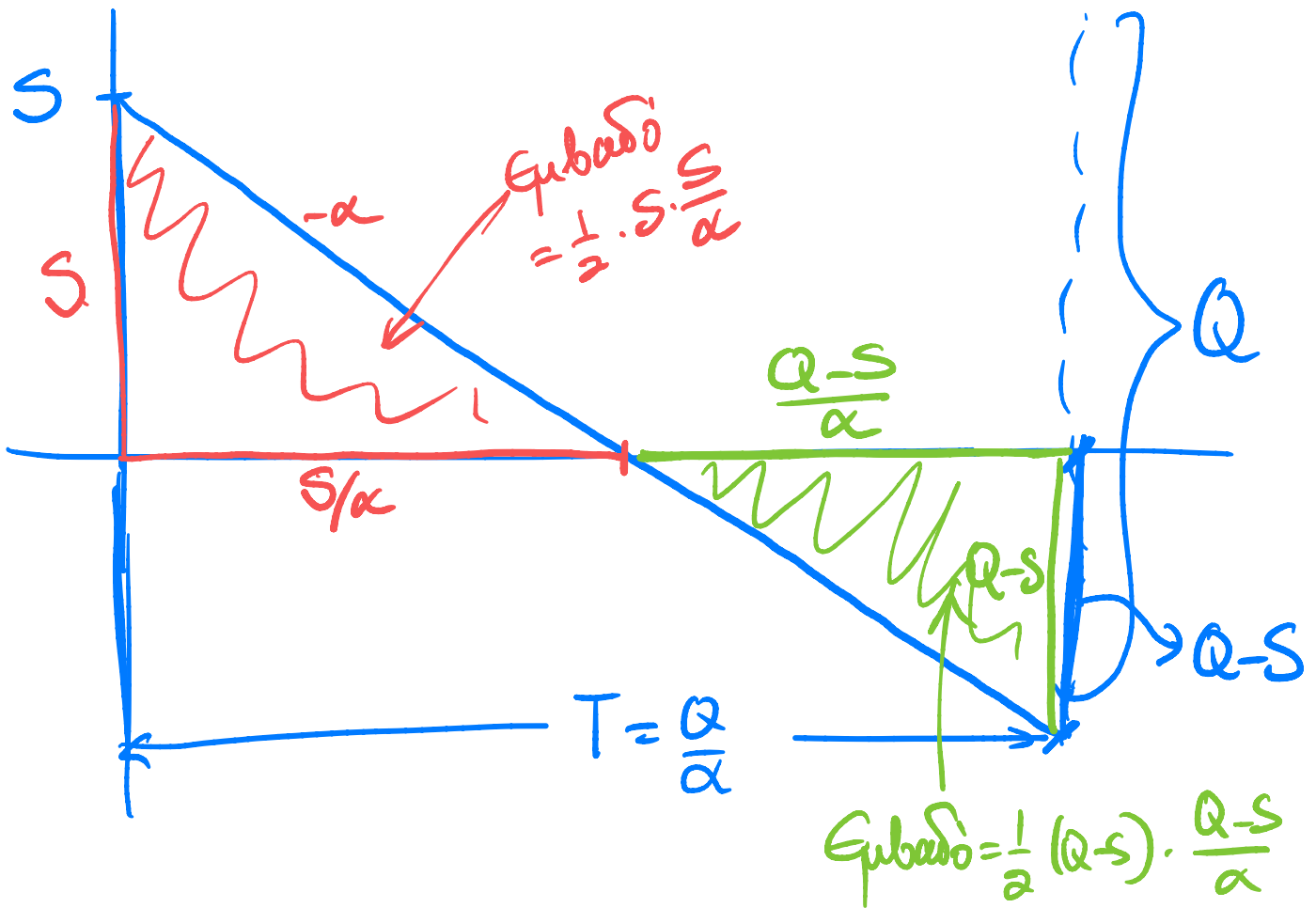
Ποσότητα (Q, S)

Συνάρτηση κόστους $C(Q, S) = \frac{\text{μίσθο}}{\text{κόστος/μστ. χρ.}}$

$$C(Q, S) = \text{κόστος παραγγ.} + \text{κόστος ανόδ.} + \text{κόστος backlog} + \text{κόστος αγοράς}$$

$$\rightarrow = \frac{k \cdot \alpha}{Q} + h \cdot \frac{S^2}{2Q} + p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2Q} + c\alpha$$

$$\text{κόστος ανόδ.} = \frac{h \cdot \epsilon\phi\beta. (\text{ανόδ.})}{T}$$



Σε ένα κύκλιο : $h \cdot \frac{S^2}{2\alpha} + p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2\alpha}$

Ανά μ.χ. χρόνου : $\frac{h \frac{S^2}{2\alpha} + p \frac{(Q-S)^2}{2\alpha}}{\frac{Q}{\alpha}} = h \cdot \frac{S^2}{2Q} + p \cdot \frac{(Q-S)^2}{2Q}$

Συν. κόστους

$$C(Q, S) = \frac{k\alpha}{Q} + \frac{1}{2} h \frac{S^2}{Q} + \frac{1}{2} p \cdot \frac{(Q-S)^2}{Q} + c\alpha$$

$$\min_{Q, S} C(Q, S) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial Q} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial S} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} Q^* = \underbrace{\sqrt{\frac{2\alpha k}{h}}}_{\text{νοσ. παραγγ.}} \cdot \sqrt{\frac{p+h}{p}} \\ S^* = \underbrace{\sqrt{\frac{2\alpha k}{h}}}_{\text{μεγιστο αποθεμα}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}} \\ B^* = Q^* - S^* = \underbrace{\sqrt{\frac{2\alpha k}{h}}}_{\text{μεγιστο backlog}} \cdot \sqrt{\frac{h}{p+h}} \\ C^* = C(Q^*, S^*) = \sqrt{2\alpha k h \frac{p}{p+h}} = \underbrace{\sqrt{2\alpha k h}}_{< \sqrt{2\alpha k h}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}} \end{array}$$

