2021-05-14 | # Dynamic Economic Lotsize Model

Πρόβλημα N διακριτών περιόδων

Για την περίοδο j : r_j = ζήτηση (καλύπτεται στην αρχή της περιόδου)

K = setup cost

h = κόστος αποθήκευσης ανά περίοδο / μον. προϊόντος

Δεν επιτρέπονται ελλείψεις

Lead time = 0

Αναπλήρωση αποθέματος στην αρχή της περιόδου πριν την κάλυψη της ζήτησης

Q_j = ποσότητα παραγγελίας στην αρχή περ. j

I_j = " σε απόθεμα " " " j

$$I_{j+1} = I_j + Q_j - r_j$$

Ελαχιστοποίηση συνολικό κόστος παραγγελιών και αποθήκευσης N περιόδων.

Ιδιότητα Μηδενικού Αποθέματος

Για κάθε βέλτιστη πολιτική παραγγελιών ισχύει

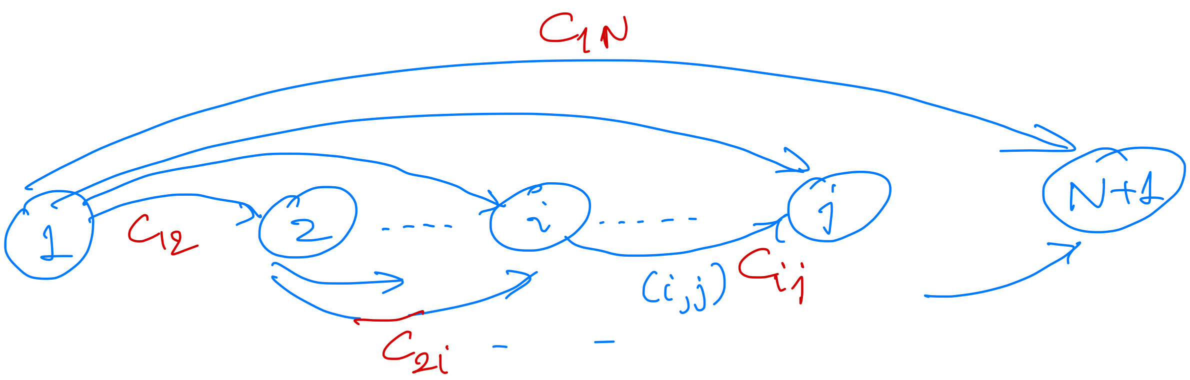
$$Q_j I_j = 0 \quad \forall j.$$

Αν $I_j > 0 \Rightarrow Q_j = 0$

Αν $Q_j > 0 \Rightarrow I_j = 0$

$\Big\}$ παραγγελίες γίνονται μόνο σε περιόδους με μηδ. απόθεμα

Δίκτυο   Κόμβοι $1, 2, \ldots, N+1$ → περίοδοι ($N+1$ τέλος Nοστής περιόδου)



Ακμή (i,j) → Γίνεται παραγωγή/παραγγελία στην περίοδο i και η αμέσως επόμενη παραγγ. στην περίοδο j

$C(i,j)$ = κόστος (i,j) = κόστος παραγγελίας στην i κ' αποθήκευσης από i έως $j-1$

Πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής (Δυναμικός Προγραμματισμός)

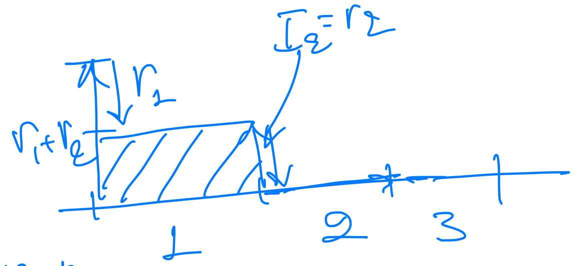
Υπολογισμός κόστους ακμών C_{ij}

$(1,2)$: $\left.\begin{array}{l} Q_1 = r_1 \\ \text{Απόθεμα} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(1,2) = K$

$(1,3)$ $Q_1 = r_1 + r_2$

κόστος παραγ $= K$

κόστος αποθηκ $= h \cdot r_2$



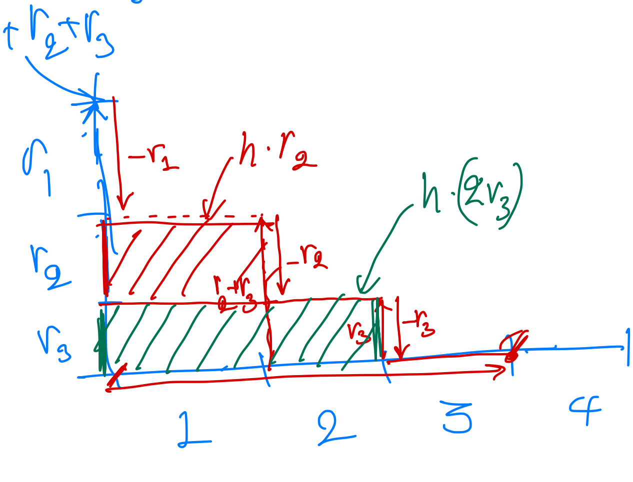
$(1,4)$ $Q_1 = r_1 + r_2 + r_3$

κόστος παραγ $= K$

κόστος αποθ $= h(r_2+r_3) + h \cdot r_3$

$= h r_2 + h \cdot (2r_3)$

→



Γενικά: $C(i,j) = K + h\cdot 0\cdot r_i + h\cdot 1\cdot r_{i+1} + h\cdot 2\cdot r_{i+2} + \cdots$

$$+ \cdots + h(j-1-i)\, r_{j-1}$$

Παράδειγμα $N=4,\ K=200,\ h=2,\ r_1=30,\ r_2=50,\ r_3=10,\ r_4=30$

$C_{12} = K = 200$

$C_{13} = K + h\cdot r_2 = 200 + 2\cdot 50 = 300$

$C_{14} = \underbrace{K + h\cdot r_2} + h\cdot 2 r_3 = \underbrace{200 + 2\cdot 50} + 2\cdot 2\cdot 10 = 340 \ [= C_{13} + h\cdot 2\cdot r_3]$

$C_{15} = \underbrace{K + h\cdot r_2 + h\cdot 2 r_3} + h\cdot 3 r_4 = 340 + 2\cdot 3\cdot 30 = 520 = (C_{14} + h\cdot 3\cdot r_4)$

$C_{23} = K = 200$

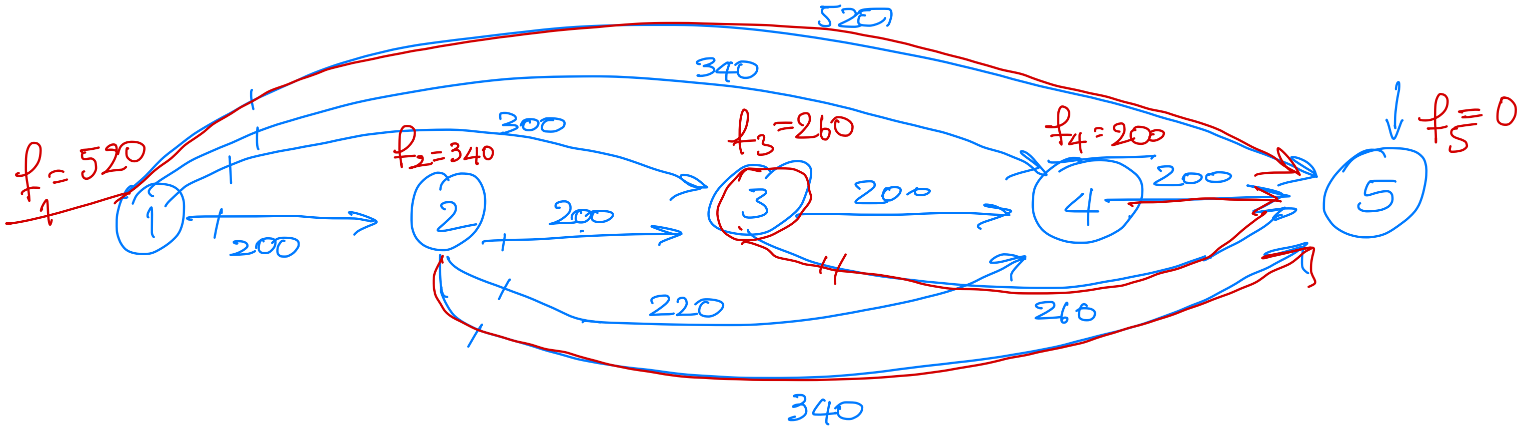
$C_{24} = K + h\cdot r_3 = 200 + 2\cdot 10 = 220$

$C_{25} = K + h\cdot r_3 + h\cdot 2 r_4 = 220 + 2\cdot 2\cdot 30 = 340$

$C_{34} = K = 200$

$C_{35} = K + h\cdot r_4 = 200 + 2\cdot 30 = 260$

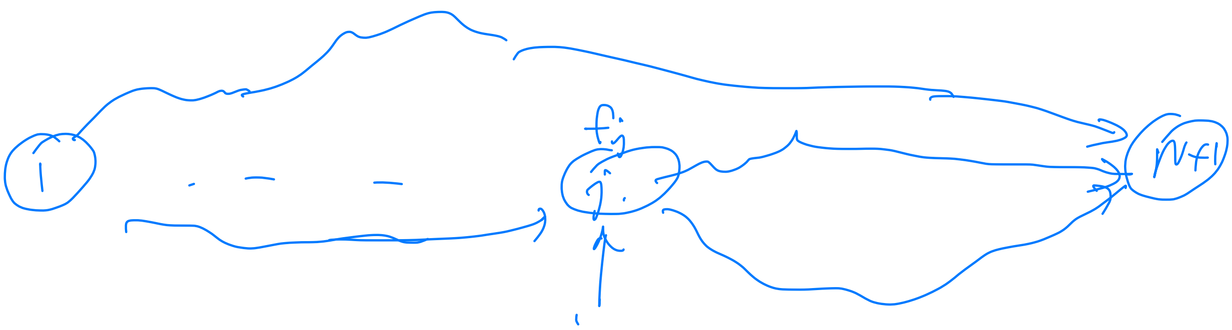
$C_{45} = K = 200$



Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού για εύρεση ελάχιστης διαδρομής

Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

f_j = ελάχιστο κόστος από κόμβο j έως τον τερματικό κόμβο N+1



Στο παράδειγμά μας

$$f_5 = 0$$

$$f_4 = 200$$

$$f_3 = \min\left\{ \underline{C_{34}} + \underline{f_4} \,,\, \underline{C_{35}} + \underline{f_5} \right\} = \min \begin{cases} 200 + 200 \\ 260 + 0 \end{cases}$$

$$= \min \begin{cases} 400 \\ 260 \end{cases} = \underline{\underline{260}}$$

$$f_2 = \min \begin{cases} C_{23} + f_3 \\ C_{24} + f_4 \\ C_{25} + f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 200 + 260 \\ 220 + 200 \\ \underline{340 + 0} \end{cases} = 340$$

$$f_1 = \min \begin{cases} C_{12} + f_2 \\ C_{13} + f_3 \\ C_{14} + f_4 \\ C_{15} + f_5 \end{cases} = \min \begin{cases} 200 + 340 \\ 300 + 260 \\ 340 + 200 \\ 520 + 0 \end{cases} = \min \begin{cases} 540 \\ 560 \\ 540 \\ \underline{520} \end{cases} = \underline{\underline{520}}$$

Ελάχιστο συνολικό κόστος = 520

Βέλτιστη διαδρομή = $\boxed{1 \to 5}$

<u>Παραγγελίες</u>

$$Q_1 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0$$

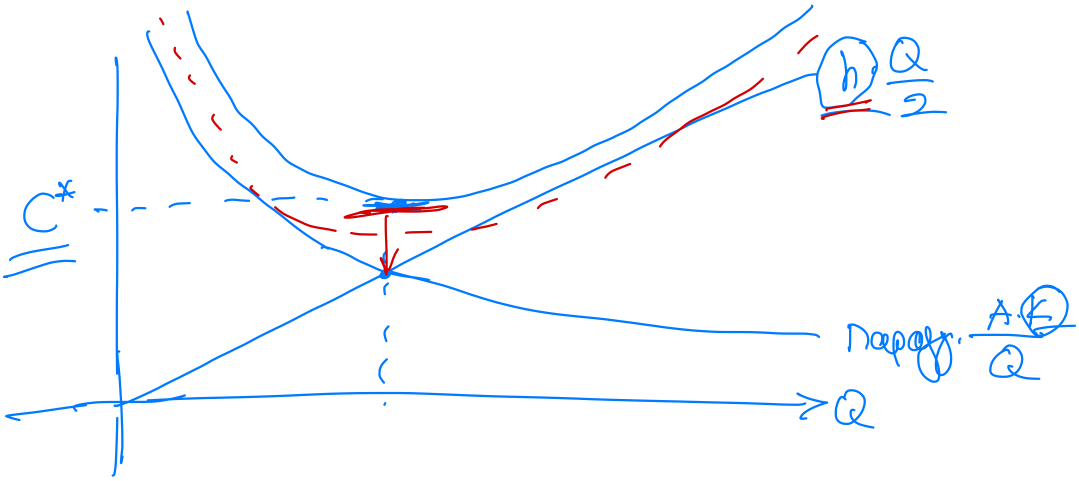
Setup Costs κ' Κόστη Αποθήκευσης

Setup Cost : Οικονομίες Κλίμακας

h : Κόστος Αποθήκευσης

$Q_1, Q_2, \ldots$ για εξισορροπήσουμε με τον καλύτερο τρόπο

π.χ. EOQ



Για να μειωθούν τα κόστη αποθήκευσης { διάφοροι τρόποι (εκτός αρχ. παραγγελίας) }

Για να μειωθεί το K → κόστος παραγγελίας → κόστος έναρξης παραγωγής

K μεγαλύτερο όσο λιγότερη ευελιξία έχει ο προμηθευτής

K μεγαλύτερο όσο λιγότερο ευέλικτη είναι η παραγωγή σε αλλαγές

Toyota Φιλοσοφία Just-in-Time (JIT) (Lean Manufacturing)

Αν $K \approx 0$ ⟹ $\boxed{\text{απόθεμα} \approx 0}$

παραγωγή γίνεται "just in time" όποτε χρειάζεται (τελευταία στιγμή)

Διαχείριση Αποθεμάτων με Αβεβαιότητα στη Ζήτηση

→ ① Μοντέλο (Q,R) (Επέκταση του EOQ με αβέβαιη ζήτηση)

② " Εφημεριδοπώλη (διαφορετικό)

Μοντέλο (Q,R)

Βασικές υποθέσεις EOQ (συνεχούς χρόνου)

K = σταθ. κόστος παραγγελίας

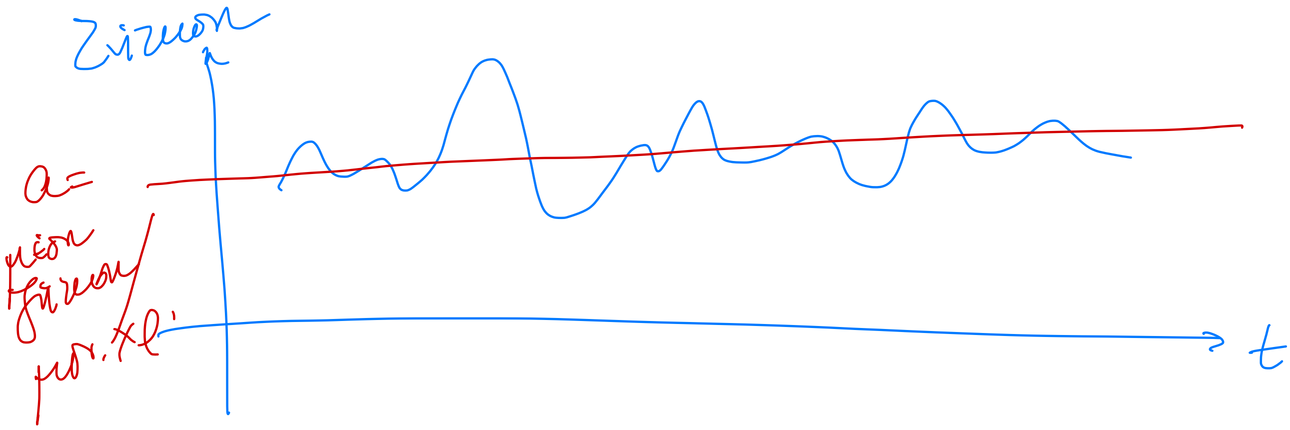
h = κόστος αποθήκευσης / μον. πρ., μον. χρόνου

p = " backlog / " " , "

Lead time $= L > 0$

Ζήτηση: Τυχαία

a = μέση ζήτηση / μον. χρόνου = γνωστή και σταθερή



Περίπτωση (L=0)

Οι ελλείψεις μπορούν να αποφευχθούν εντελώς (αν θέλουμε)

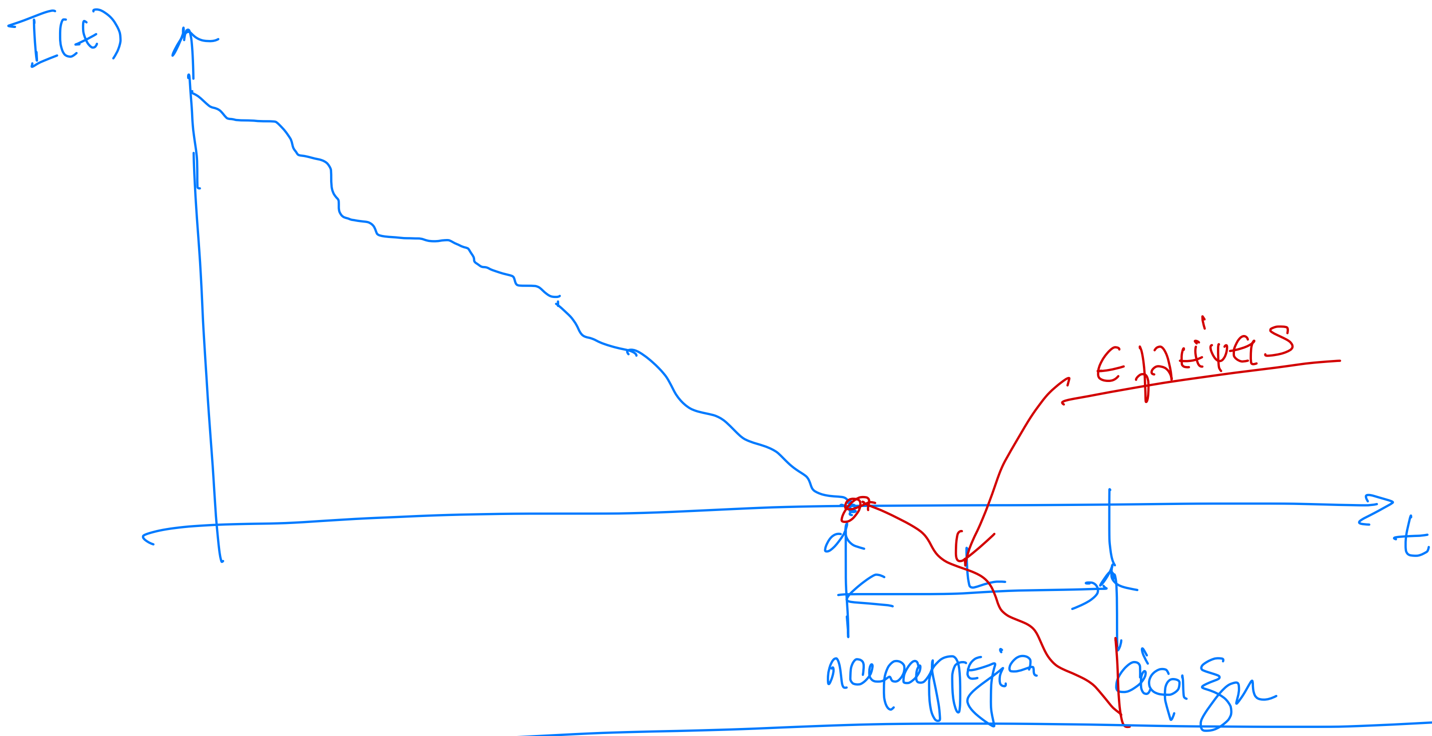
Προσεγγιστικά (EOQ):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

Q = μέση ζήτηση

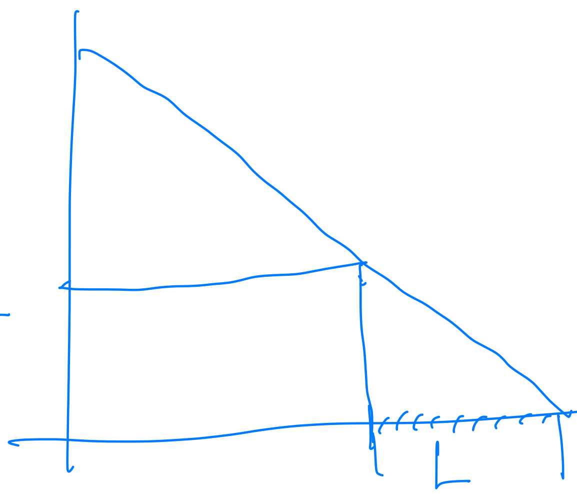
Περίπτωση L>0:

(Επιτρέπεται να είναι τυχαίο
$\overline{LT}$ = μέση τιμή σ^2_{LT} = διασπορά)



Στο EOQ με α = γνωστό

R = αL

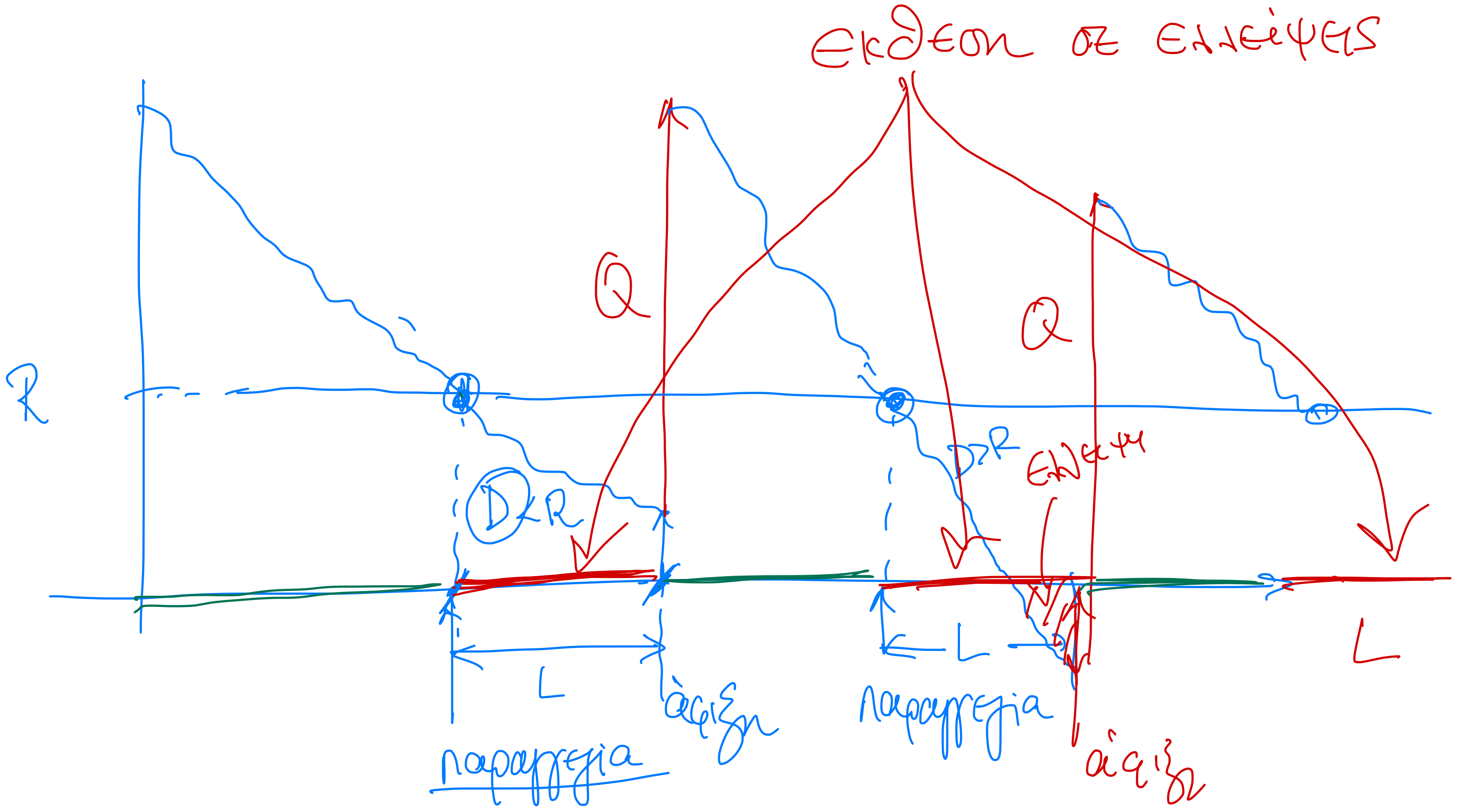


R = reorder point = αL

Πολιτική (R, Q)

Όταν I(t) = R παραγγελία = Q

R = αL = ζήτηση ενός lead time



Έστω $\boxed{D \text{ η συνολική ζήτηση σε διάρκεια } L}$

D : τυχαία μεταβλητή

Κατανομή ζήτησης

Q = μέση ζήτηση / μον. χρόνου

Η κατανομή εξαρτάται από το χρονικό πλαίσιο ← το Lead Time

Μας ενδιαφέρει η κατανομή της ζήτησης στη διάρκεια ενός L, δηλαδή της τμ. D

Έστω η κατανομή του D

$F(x) = P(D \le x)$, $x \in [0, \infty)$

Η πολιτική (R, Q) έχει δύο παραμέτρους → Q, → R

Η ακριβής μορφή/υπολογ. βέλτιστης πολιτικής (R^*, Q^*) πολύ πολύπλοκη (υπάρχει αλγόριθμος)

Προσεγγιστική πολιτική

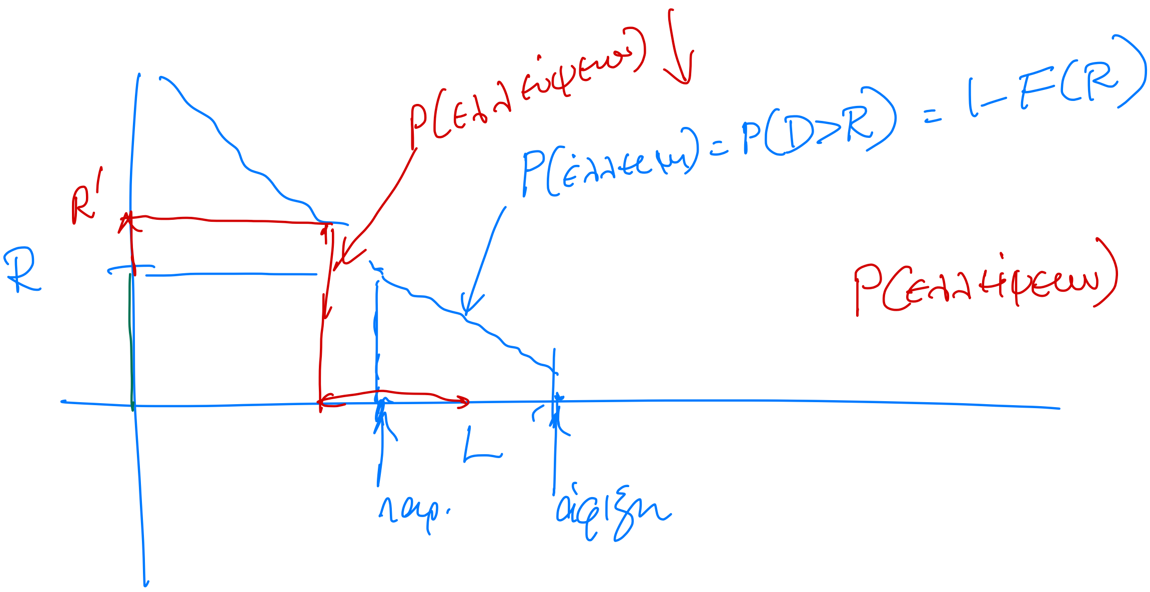
$Q^* =$ EOQ με προγρ. ελλείψεις

$$\doteq \sqrt{\frac{2aK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p+h}{p}}$$

a = μέση ζήτηση / μον. χρόνου

p, a, h : (στην ίδια μονάδα χρόνου)

Επίπεδο αναπλήρωσης R



P(ελλείψεων) ↓ R

Κριτήριο για το R:

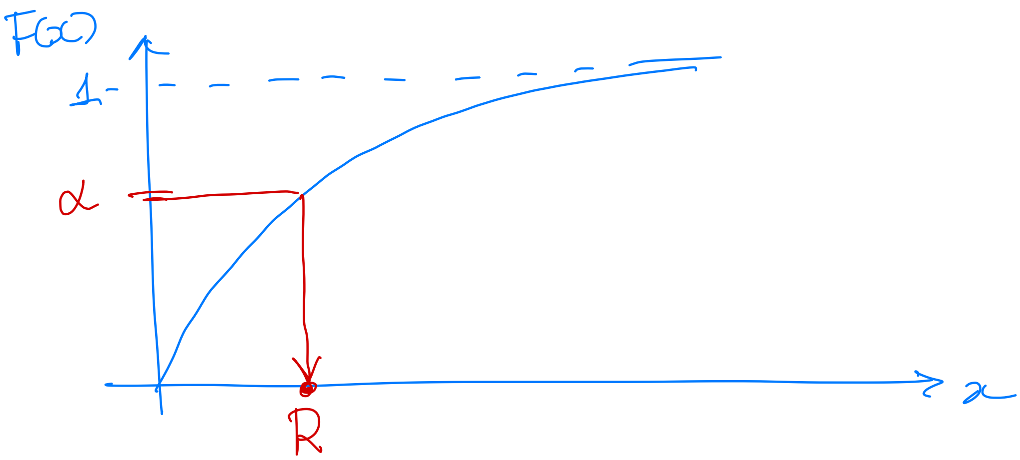
$P(\text{όχι ελλείψεις σε ένα κύκλο}) = P(D \leq R) = F(R)$

$=$ επίπεδο εξυπηρέτησης τύπου I $=$ service level I

$=$ % περιόδων (κύκλων) χωρίς ελλείψεις

α = επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης (π.χ. 80%, 90%...)

Θέτουμε R έτσι ώστε $\boxed{F(R)=\alpha}$ λύνουμε ως προς R.



Χρειάζεται να γνωρίζουμε την κατανομή του D.

" " ορίσουμε την κατάλληλη τιμή στόχο για το α

$\alpha \quad \uparrow_p \quad \downarrow_h$

Παράδειγμα ① Έστω $D \sim Exp(\lambda)$

$$F(x) = P(D \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

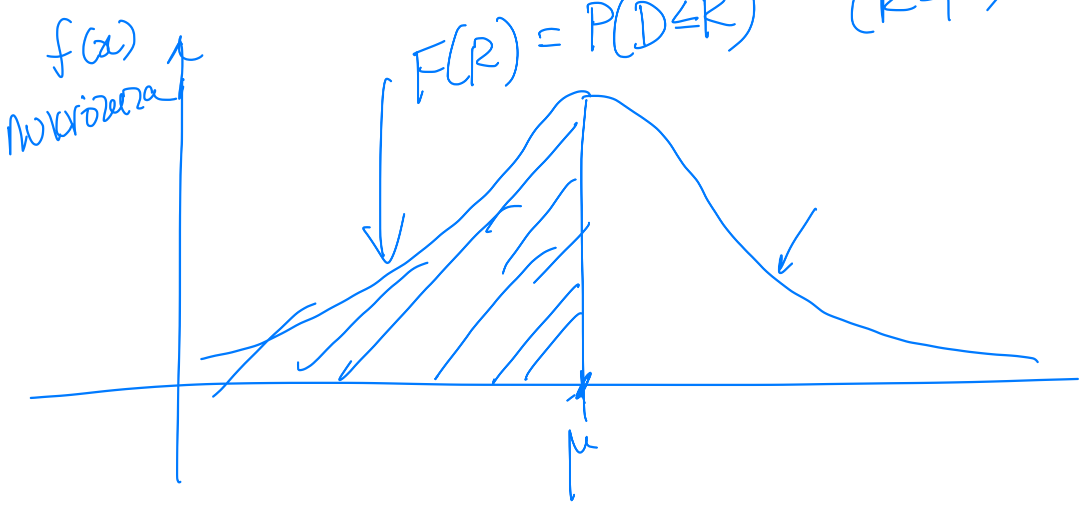
$$F(R) = \alpha \Rightarrow 1 - e^{-\lambda R} = \alpha \Rightarrow e^{-\lambda R} = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda R = \log(1-\alpha) \Rightarrow \boxed{R = -\frac{1}{\lambda}\cdot \underbrace{\log(1-\alpha)}_{(<0)}}$$

② Έστω $D \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = P(D \le x) = P\left(\frac{D-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Φ : συν. κατανομής $N(0,1)$



Θυμηθείτε D : ζήτηση σε χρόνο L }

μέση ζήτηση/μον. χρ $= \alpha$

① $\boxed{\mu = E(D) = \alpha \cdot L}$

② Αν $(R = \mu = \alpha L)$ (όπως στο EOQ με γνωστή ζήτηση) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad F(R) = 50\% = 1/2$

Επομένως το $R = \alpha L$ (EOQ) αντιστοιχεί στο επίπεδο εξυπηρ = 50%

Αν όμως θέλουμε $\alpha > 50\% \Rightarrow \boxed{R > \alpha L}$