# 2021-05-21 | Μοντέλο Εφημεριδοπώλη

Στο μοντέλο (R, Q) έχουμε αβεβαιότητα στη ζήτηση ως προς τα υπόλοιπα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του EOQ.

trade off μεταξύ → οικονομιών κλίμακας (λόγω σταθ. κόστους παραγ.)
→ κόστους αποθήκευσης

---

Υπάρχουν προϊόντα όπου η αβεβαιότητα στη ζήτηση έχει θεμελιωδώς διαφορετικές επιπτώσεις.

Παράδειγμα: Εφημερίδες: (Λιανοπωλητής)

Επειδή πρέπει να γίνονται παραγγελίες/παραλαβές καθημερινά, η ύπαρξη ή όχι σταθ. κόστους δεν σχετίζεται με τη διαχείριση παραγγελιών.

Επίσης δεν υπάρχει κόστος αποθήκευσης από μια περίοδο σε επόμενη.

Πολιτική παραγγελιών εξαρτάται από ζήτηση

1. Αν η ζήτηση είναι γνωστή η απάντηση είναι προφανής

2. Αν η ζήτηση έχει αβεβαιότητα, ποιοι παράγοντες παίζουν ρόλο στη στρατηγική παραγγελιών;

?

2 Κίνδυνοι

Downside risk
Ζήτηση χαμηλή ⇒ απούλητα προϊόντα
⇒ κόστος

Upside risk
Ζήτηση υψηλή ⇒ ελλείψεις ⇒
⇒ κόστος

X = ζήτηση
Q = ποσότητα παραγγελίας

Upside risk    Downside risk

− Q +

Εφαρμογές (εκτός από εφημερίδες)

1. Προϊόντα με ημερομηνία λήξης.

2. Κυριότερες εφαρμογές σε προϊόντα όπως ρούχα/υποδήματα μόδας σεζόν

Αβεβαιότητα για ζήτηση (>>)

Lead Time (>>)

πωλήσεις

Φθινόπωρο 2020

καλοκ. 21

Μικρές δυνατότητες για διορθωτική κίνηση

# Μοντελοποίηση Προβλήματος Εφημεριδοπώλη

Έστω $X$ ζήτηση μιας περιόδου

$Q$ ποσότητα παραγγελίας

$X$ : τυχαία μεταβλητή (συνεχής)

$F(x) = P(X \leq x)$ = συνάρτηση κατανομής

$f(x) = F'(x)$ = συν. πυκνότητας πιθ.

## Παράμετροι κόστους

1. Downside Risk ⟺ overorder : Όταν $X < Q$

   $Q - X > 0$ : απώλεια προϊόντα

   Κόστος $C_o \cdot (Q-X)$, $C_o$: overorder cost/unit

2. Upside Risk ⟺ Underorder : $X > Q$

   $X - Q$ : έλλειψη

   Κόστος $C_u \cdot (X-Q)$, $C_u$: underorder cost/unit

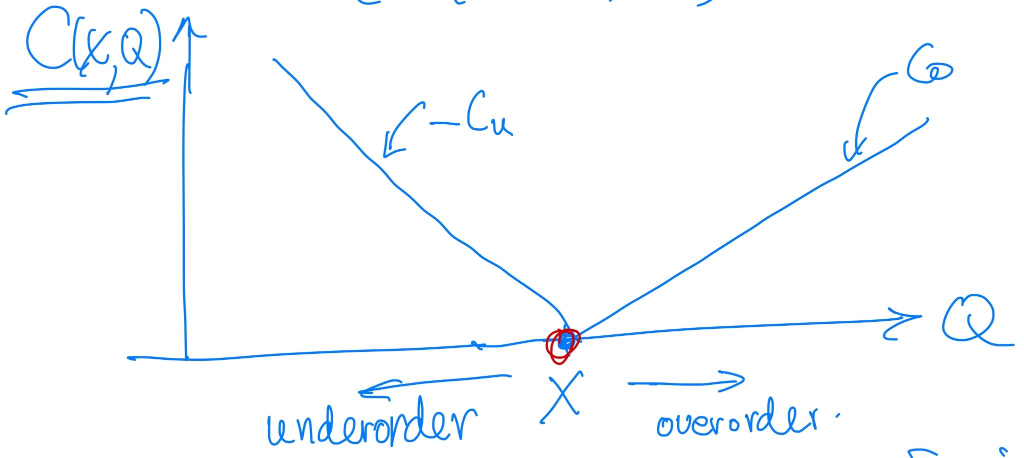
$$\boxed{\text{Κόστος περιόδου } C(X,Q) = \begin{cases} C_o(Q-X), & X<Q \\ C_u(X-Q), & X>Q \end{cases}}$$

3. $X = Q$ (ιδανική περίπτωση)

   Κόστος $= 0$. $(P(X=Q)=0)$

Κόστος μιας περιόδου

$$C(X,Q) = \begin{cases} C_o(Q-X), & X<Q \\ C_u(X-Q), & X>Q. \end{cases}$$




(1) Ελαχιστοποιείται για $\boxed{Q=X}$ ? Δεν έχει νόημα Q ορίζεται πριν γίνει γνωστή η ζήτηση

(2) $C(X,Q) = C_o \cdot (Q-X)^+ + C_u (X-Q)^+$

όπου για $a \in \mathbb{R}$ $a^+$ : θετικό μέρος του $a$

$$a^+ = \max(a,0) = \begin{cases} a, & a>0 \\ 0, & a<0. \end{cases}$$

$(2^+ = 2, \quad (-2)^+ = 0)$

$$\boxed{C(X,Q) = C_o(Q-X)^+ + C_u(X-Q)^+}$$

Ιδιότητες $a^+$

① $\boxed{a = a^+ - (-a)^+}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{αν } a>0 \Rightarrow a^+ = a \\ \qquad (-a)^+ = 0 \\ \qquad \Rightarrow a = a \quad ✓ \end{array} \right.$

αν $a<0 \Rightarrow (-a) > 0$

$\Longrightarrow \left. \begin{array}{l} a^+ = 0 \\ (-a)^+ = -a \ (>0) \end{array} \right\} a = 0 - (-a) = a$ ✓

② $a - (a-b)^+ = \begin{cases} a - 0 = a, & a<b \\ a - (a-b) = b & a>b \end{cases}$

$= \min(a,b)$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = a^+ - (-a)^+ \\ \min(a,b) = a - (a-b)^+ \end{array}} \leftarrow$$

$\Updownarrow$

$\min(X, Q) = X - (X-Q)^-$

$\underbrace{Q-X}_{\alpha} = (Q-X)^+ - (X-Q)^+$

$\alpha = \alpha^+ - (-\alpha)^+$

## Απώλητα προϊόντα

1. Άχρηστα
2. Μέρος της αξίας κτήσης του μπορεί να ανακτηθεί (π.χ. επιστροφή στον προμηθευτή, πώληση σε δευτερογενή αγορά κτλ).

## Ελλείψεις

1. Χαμένες πωλήσεις
2. Κόστος απώλειας καλής διάθεσης πελάτη
3. Backlog ⇒ Emergency order (έκτακτη πρόσθετη παραγγελία)

Για κάθε συνδυασμό περιπτώσεων

$$C_o = ?$$

$$C_u = ?$$

## Παράδειγμα 1

Διανοπωλητής αγοράζει προϊόν από προμηθευτή σε χονδρική τιμή $c$/μονάδα. Πωλεί σε λιανική τιμή $r$/μονάδα.

Απούλητα : μηδενική αξία

Ελλείψεις : χαμένες πωλήσεις

**Μεγιστοποίηση κέρδους**

$$c_o = ? \quad , \quad c_u = ?$$

Έστω $\Pi(X,Q)$ = κέρδος μιας περιόδου
= έσοδα − έξοδα

$X=30, Q=50 \Rightarrow 30$
$X=80, Q=50 \Rightarrow 50$

Έσοδα : $r \cdot \underbrace{\min(X,Q)}_{\text{πωλήσεις}}$

Έξοδα : $cQ$

$$\Pi(X,Q) = r\min(X,Q) - cQ$$

$= \ldots ? = \ldots$ (να εμφανιστούν όροι $(Q-X)^+$, $(X-Q)^+$)

$$\Pi(X,Q) = r\min(X,Q) - cQ$$

$$= rX - r\underbrace{(X-Q)^+} - cQ$$

$$= (r-c)X + cX - cQ - r(X-Q)^+$$

$$= \underbrace{(r-c)X} - c(Q-X) - r(X-Q)^+$$

$$= (r-c)X - c(Q-X)^+ + c(X-Q)^+ - r(X-Q)^+$$

$$= (r-c)X - c(Q-X)^+ - (r-c)(X-Q)^+ =$$

$$\boxed{\Rightarrow \Pi(X,Q) = (r-c)X - \underbrace{\left[c(Q-X)^+ + (r-c)(X-Q)^+\right]}_{C(X,Q)}}$$

$$\max_Q \Pi \iff \min_Q C(X,Q)$$

$$\min_Q \left\{ C_0(Q-X)^+ + C_u(X-Q)^+ \right\}$$

$$\Pi(Q,X) = \underbrace{(r-c)X}_{\text{κέρδος αν πωλήσουμε } X} - \underbrace{\{c(Q-X)^+ + (r-c)(X-Q)^+\}}_{\text{κόστος λάθους στην παραγγελία}}$$

100

κόστος έλλειψης πληροφ. για ζήτηση

αν γνωρίζαμε εξ αρχής τη ζήτηση θα θέταμε $Q=X \Rightarrow \Pi(Q,X)=(r-c)X$

(μέγιστο δυνατό)

κέρδος κάτω από πλήρη πληροφόρηση

$$\boxed{C(X,Q) = c(Q-X)^+ + (r-c)(X-Q)^+}$$

30

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} C_o &= c \\ C_u &= r-c \end{aligned}}$$

$C_o$ = κόστος επειδή μένει μια μονάδα απούλητη σχετικά με το τι θα γινόταν αν ήξερα εξ αρχής ότι αυτή η μονάδα δεν θα πουληθεί

εδώ αν ήξερα ότι δεν θα πουληθεί δεν θα το αγόραζα $\Rightarrow$ κόστος $=0$

τώρα που αγοράστηκε $\Rightarrow$ κόστος $=c$

$C_o = c$

$C_u$ = επίπτωση μιας μονάδας σε έλλειψη
σε σχέση με το τι θα γινόταν αν γνώριζα ότι
αυτή η μονάδα θα ζητηθεί.

εδώ

Αν γνώριζα ότι θα ζητηθεί η μονάδα: θα αγόραζα: $-c$
" πωλούσα: $r$
κέρδος $r-c$

τώρα που είναι έλλειψη: κόστος $=0$, έσοδα $=0$ } κέρδος $=0$

$C_u = r-c$ [διαφυγόν κόστος
κέρδος = ευκαιρίας]

## Παράδειγμα 2

Λιανοπ. → χονδρική $w$
→ λιανική τιμή $r$

Απούλητα επιστρέφονται σε τιμή $s$ ($< w$)

$s$ = salvage value

[Μπορεί $s<0$ !!]

$$C_o = w - s$$

$$C_u = r - w$$

## Παράδειγμα 3

Χονδρ. $w$
Λιανική $r$
Απούλητα $s=0$

Ελλείψεις ⇒ έκτακτη παραγγελία σε τιμή $w' > w$

$$C_o = w \quad \text{(ανεξ } r\text{)}$$

$C_u$ = { αν ήξερα ότι θα χρειασθεί → αγορά $w$, → πώληση $r$ } κέρδος $(r-w)$
τώρα που γίνεται έκτακτη παραγγ → αγορά $w'$, → πώληση $r$ } κέρδος = $(r-w')$

$$C_u = (r-w) - (r-w') = \boxed{w' - w} \quad \text{(ανεξάρτητο του } r\text{)}$$

# "Σωστή" Συνάρτηση Κόστους

Δεν έχει νόημα να ελαχ. το $C(X,Q)$ ως προς $Q$ γιατί όταν αποφ. για το $Q$ δε γνωρίζουμε το $X$.

Πρόβλημα μιας περιόδου που υποθέτουμε ότι επαναλαμβάνεται κάθε περίοδο για μεγάλο αριθμό περιόδων.

Ελαχ. μέσο κόστος ανά περίοδο.

Σε κάθε περίοδο $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q$ (στάσιμη πολιτική)

Όμως $X_1, X_2, \ldots$ γενικά διαφορετικά

ανεξάρτητες ισόνομες τυχ. μεταβλ.

Επομένως
$$C_1 = C(X_1, Q) \quad \text{κόστος } 1^{ης} \text{ περ.}$$
$$C_2 = C(X_2, Q) \quad \text{" } 2^{ης} \text{ περ.}$$
$$\vdots$$
$$C_n = C(X_n, Q) \quad \text{" } n\text{-περ.}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ : ανεξ. ισόνομες τυχ. μεταβλ.

$$\overline{C}_n = \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \quad \text{μέσο κόστος}$$

Από πιθανότητες: νόμος μεγάλων αριθμών

όταν $n \to \infty$ $\quad \overline{C}_n \to \underbrace{E(C(X,Q))}_{\text{θεωρ. μέση τιμή}}$

Κριτήριο $\boxed{\min_Q E(C(Q,X))} = \boxed{G(Q)}$

## Συνάρτηση Κόστους

σ.π.π.

$$G(Q) = E(C(Q,\underset{\text{τμ.}}{X})) = \int_{x=0}^{\infty} C(Q,x)\, f(x)\, dx .$$

$$C(Q,x) = \begin{cases} C_o(Q-x), & x<Q \\ C_u(x-Q), & x>Q \end{cases} = C_o(Q-x)^+ + C_u(x-Q)^+$$

$$G(Q) = \int_0^Q C_o(Q-x) f(x)\,dx + \int_Q^\infty C_u(x-Q) f(x)\,dx$$

$$= C_o Q \int_0^Q f(x)\,dx - C_o \underbrace{\int_0^Q x f(x)\,dx}_{H(Q)} + C_u \underbrace{\int_Q^\infty x f(x)\,dx}_{\text{"} \mu - \int_0^Q x f(x)dx} - C_u Q \int_Q^\infty f(x)\,dx .$$

(1) $$\int_0^Q f(x)\,dx = P(X \le Q) = F(Q)$$

$$\int_Q^\infty f(x)\,dx = P(X>Q) = 1-F(Q)$$

$$\int_0^Q x f(x)\,dx + \int_Q^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x f(x)\,dx = E(X) = \mu \quad (\text{ανεξ. } Q)$$

$$G(Q) = C_o Q F(Q) - C_o H(Q) + C_u(\mu - H(Q)) - C_u Q(1-F(Q))$$

$$= \boxed{C_u \mu - C_u Q + (C_o + C_u) Q F(Q) - (C_o+C_u) H(Q)}$$

$$F'(Q) = f(Q)$$

$$H(Q) = \int_0^Q x f(x)\,dx \Rightarrow H'(Q) = Q f(Q)$$

$$G'(Q) = -C_u + (C_o+C_u)\left(F(Q)+\cancel{Qf(Q)}\right) - \cancel{(C_o+C_u)\,Qf(Q)}$$

$$\Rightarrow G'(Q) = -C_u + (C_o+C_u)F(Q)$$

$$G''(Q) = (C_o+C_u)f(Q) \geq 0 \qquad (G(Q) \text{ κυρτή})$$

αρκεί για min να $G'(Q)=0$

$$\Rightarrow \boxed{F(Q^*) = \frac{C_u}{C_u+C_o}}$$

τύπος του εφημεριδοπώλη

$R = \frac{C_u}{C_u+C_o}$ : κρίσιμος λόγος $= \frac{1}{1+(C_o/C_u)}$

$F(Q^*) = P(X \leq Q^*)$ = πιθ. (όχι ελλείψεις)

= service level I.

Επομένως το βέλτιστο επίπεδο εξυπηρέτησης

είναι ίσο με $R = \frac{C_u}{C_u+C_o}$

$$\boxed{F(Q^*) = R}$$