Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Θεωρία Αποφάσεων
Τελικό Διαγώνισμα 4 Ιουλίου 2007 - Α

Πρόβλημα 1. Θεωρήστε το σύνολο F που ορίζεται από το παρακάτω σύστημα ανισώσεων

$$F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + 2x_2 \geq 4, \mathbf{x} \geq 0\}.$$

(α) Δείξτε ότι $F = \emptyset$.

(β) Θεωρήστε τον περιορισμό $x_1 + 2x_2 \geq 4$ ως ελαστικό περιορισμό–στόχο με ποινή $q = 1$ ανά μονάδα παραβίασης και ορίστε ένα π.γ.π. για το αντίστοιχο πρόβλημα προσέγγισης στόχου.

(γ) Βρείτε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος στο (β) και περιγράψτε τι σημαίνει για το αρχικό αδύνατο πρόβλημα (α).

Πρόβλημα 2. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$\begin{array}{lrcl} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j & \leq & b \\ & x_j & \geq & 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

όπου $c_j, a_j, j = 1, \ldots, n$ και b θετικές σταθερές.

(α) Σχηματίστε το δυϊκό πρόβλημα.

(β) Βρείτε τη βέλτιστη λύση του (α) (η λύση είναι άμεση, δε χρειάζεται Simplex ούτε χρήση υπολογιστή).

(γ) Από τη βέλτιστη λύση του (β) προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση του αρχικού π.γ.π.

Πρόβλημα 3. Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα οργάνωσης παραγωγής μιας περιόδου. Πρέπει να καθοριστούν οι ποσότητες παραγωγής για καθένα από n προϊόντα. Το προϊόν j έχει κόστος παραγωγής c_j και απαιτεί ποσότητα a_j πρώτης ύλης, $j = 1, \ldots, n$. Η συνολική ποσότητα πρώτης ύλης που είναι διαθέσιμη είναι ίση με b. Επίσης υπάρχουν δύο επιπλέον περιορισμοί. Η συνολική ποσότητα παραγωγής όλων των προϊόντων πρέπει να είναι τουλάχιστον d ώστε να καλυφθεί το επιθυμητό μερίδιο αγοράς. Επίσης, για λόγους ομαλοποίησης της παραγωγής η εταιρεία ακολουθεί την πολιτική ότι η ποσότητα κάθε προϊόντος δεν μπορεί να υπερβαίνει το διπλάσιο της μέσης ποσότητας παραγωγής όλων των προϊόντων. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η πολιτική παραγωγής που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

(α) Να μοντελοποιήσετε το παραπάνω ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

(β) Δημιουργήστε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται ως δεδομένα τα διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, και τη σταθερά b και επιστρέφει τις βέλτιστες ποσότητες παραγωγής των προϊόντων όπως επίσης και το ελάχιστο συνολικό κόστος.

(γ) Ποια είναι η βέλτιστη πολιτική για $n = 4, \mathbf{a} = (2, 1, 2, 5), \mathbf{c} = (7, 9, 12, 4), b = 45$;

Πρόβλημα 4. Ένας επενδυτής πρέπει να αποφασίσει την πολιτική επενδύσεων που θα ακολουθήσει για τα επόμενα 2 χρόνια. Στην αρχή του πρώτου χρόνου έχει n_1 επενδυτικά προγράμματα $i = 1, \ldots, n_1$. Κάθε ένα από αυτά έχει αναμενόμενη απόδοση για τον πρώτο χρόνο ίση με r_i (θεωρείται γνωστή και σταθερή). Ο επενδυτής έχει τον περιορισμό ότι μπορεί να επιλέξει το πολύ k_1 από τα n_1 προγράμματα. Στην αρχή του δεύτερου χρόνου υπάρχουν n_2 δυνατές αποφάσεις σχετικά με τις επενδύσεις σε προγράμματα. Οι δυνατές επιλογές του δεύτερου χρόνου εξαρτώνται από τις αποφάσεις που πάρθηκαν τον πρώτο χρόνο. Συγκεκριμένα αν κατά τον πρώτο χρόνο επιλέχθηκε το πρόγραμμα i, τότε στην αρχή του δεύτερου χρόνου είναι διαθέσιμα τα προγράμματα από ένα υποσύνολο $F_i \subseteq \{1, \ldots, n_2\}$ του συνόλου των δυνατών προγραμμάτων. Κάθε πρόγραμμα j του δεύτερου χρόνου έχει αναμενόμενη απόδοση w_j. Επίσης το δεύτερο χρόνο μπορεί να επιλεγούν το πολύ k_2 προγράμματα συνολικά. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί η πολιτική επενδύσεων που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος των δύο χρόνων.

Να μοντελοποιηθεί το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού.