Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Θεωρία Αποφάσεων
Τελικό Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου 2007

Πρόβλημα 1. **(α)** Έστω το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{array}{rlcl}
z = \min\limits_{u,v,w} & w & & \\
 & u & \leq & w \\
 & \omega & \leq & w \\
 & u - v & = & a \\
 & u, v & \geq & 0,
\end{array}
$$

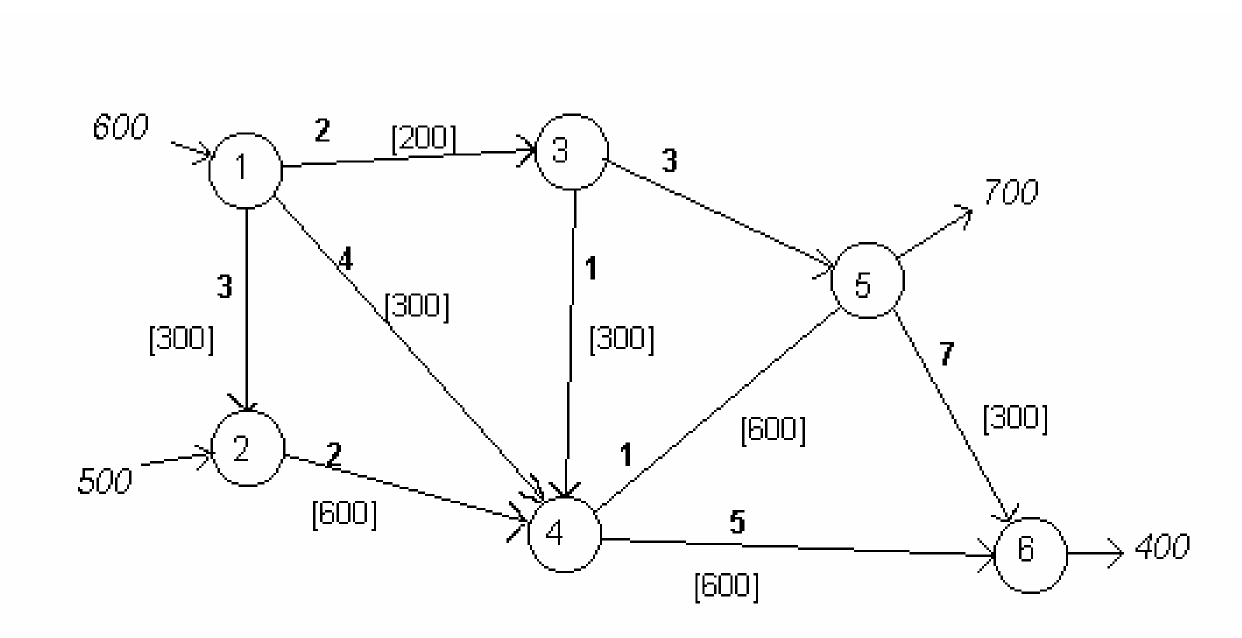
όπου $a \in \mathbb{R}$ δοσμένη σταθερά. Δείξτε ότι $z = |a|$.

(β) Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

όπου A πίνακας $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, που στη γενική περίπτωση μπορεί να μην έχει καμιά λύση. Να γραφεί ως π.γ.π. το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της νόρμας $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_\infty$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται το παρακάτω δίκτυο διανομής



Οι αριθμοί στις αγκύλες υποδηλώνουν τις χωρητικότητες των ακμών (δηλαδή τη μέγιστη ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί κατά μήκος της αντίστοιχης ακμής). Οι αριθμοί με έντονη γραμματοσειρά το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς κατά μήκος κάθε ακμής.

(α) Δημιουργήστε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς στο πρόβλημα διαμετακομιδής.

(β) Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα αυτού στο (α).

(Γυρίστε σελίδα)

Πρόβλημα 3. Θεωρήστε το πολύεδρο

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \geq 0, A\mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(α) Δώστε μια γραφική αναπαράσταση του F στο επίπεδο.

(β) Βρείτε όλους τους βασικούς πίνακες. Για έναν από αυτούς (όποιον θέλετε) βρείτε και χαρακτηρίστε την αντίστοιχη βασική λύση (αν δηλαδή είναι ή όχι βασική και αν είναι ή όχι εκφυλισμένη).

(γ) Για τη λύση που επιλέξατε στο (β) δείξτε σε ποια κορυφή του F αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση του (α).

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε το πρόβλημα παραγωγής ενός προϊόντος σε ορίζοντα T περιόδων. Αν αποφασίσουμε να παράγουμε κατά την περίοδο $t, t = 1, \ldots, T$, υπάρχει ένα σταθερό κόστος K_t, ανεξάρτητα από την ποσότητα παραγωγής, όπως επίσης και μεταβλητό κόστος ίσο με c_t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος. Το κόστος αποθήκευσης κατά την περίοδο t είναι ίσο με h_t, ενώ η ζήτηση είναι ίση με d_t. **(α)** Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα παραγωγής για ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους και πλήρη ικανοποίηση της ζήτησης ως πρόβλημα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού.

(β) Έστω ότι παραγωγή μπορεί να γίνει το πολύ σε 2 μη διαδοχικές περιόδους. Πώς αλλάζει το μοντέλο στο (α) με τη νέα απαίτηση;