ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώσεις Μαθήματος

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ Ν. ΜΠΟΥΡΝΕΤΑΣ

ΑΘΗΝΑ 2007

Περιεχόμενα

1 Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού **1.3**
1.1 Εισαγωγή . . . 1.3
1.2 Προγραμματισμός Παραγωγής . . . 1.4
1.2.1 Παραγωγή Πολλών Προϊόντων σε Μία Περίοδο . . . 1.4
1.2.2 Παραγωγή Ενός Προϊόντος σε Πολλές Περιόδους . . . 1.5
1.3 Προβλήματα Ροής σε Δίκτυα . . . 1.7
1.3.1 Το πρόβλημα διαμετακομιδής . . . 1.9
1.3.2 Το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους . . . 1.10
1.3.3 Το πρόβλημα μεταφοράς . . . 1.10
1.3.4 Το πρόβλημα μέγιστης ροής . . . 1.12
1.4 Προβλήματα Προγραμματισμού Εργασίας . . . 1.14
1.5 Τμηματικά Γραμμικές Αντικειμενικές Συναρτήσεις . . . 1.16
1.5.1 Προβλήματα Προσέγγισης Στόχων . . . 1.18
1.6 Ασκήσεις . . . 1.20

2 Βασικές Ιδιότητες Γραμμικού Προγραμματισμού **2.1**
2.1 Εισαγωγή . . . 2.1
2.2 Γεωμετρικές Ιδιότητες . . . 2.3
2.2.1 Εναλλακτική Γεωμετρική Αναπαράσταση . . . 2.13
2.3 Βασικές Λύσεις . . . 2.15
2.4 Αλλαγή Βάσης - Μέθοδος Simplex . . . 2.23
2.5 Οικονομική Ερμηνεία . . . 2.44
2.6 Ασκήσεις . . . 2.46

3 Αρχές Θεωρίας Δυϊκότητας **2.1**
3.1 Εισαγωγή . . . 3.1
3.2 Ορισμός Δυϊκού - Ασθενής Δυϊκότητα . . . 3.5
3.3 Το ισχυρό Θεώρημα Δυϊκότητας . . . 3.11
3.4 Συμπληρωματικότητα . . . 3.14
3.5 οικονομική Ερμηνεία . . . 3.17
3.6 Ασκήσεις . . . 3.24

4 Εισαγωγή στον Ακέραιο Προγραμματισμό **4.1**
4.1 Εισαγωγή . . . 4.1
4.2 Εφαρμογές Ακέραιου Προγραμματισμού . . . 4.6
4.2.1 Το Πρόβλημα Τοποθέτησης Σταθμών Παραγωγής . . . 4.9

4.2.2 Το Πρόβλημα Τοποθέτησης καιΠαραγωγής 4.11
4.2.3 Διαζευκτικοί Περιορισμοί 4.13
4.2.4 Μεταβλητές με Πεπερασμένο Σύνολο Τιμών 4.18
4.2.5 Γενική Τμηματικά Γραμμική Αντικειμενική Συνάρτηση 4.19
4.2.6 Το Πρόβλημα Ανάθεσης 4.23
4.3 Η Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος 4.24
4.3.1 Χαλαρώσεις και Φράγματα 4.25
4.3.2 Μέθοδος Κλάδου-Φράγματος 4.30
4.4 Ασκήσεις 4.46

Βιβλιογραφία

Κεφάλαιο 1

Εφαρμογές Γραμμικού Προγραμματισμού

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά προβλήματα βελτιστοποίησης που μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού. Καθένα από τα προβλήματα που θα αναπτυχθούν αποτελεί εκπρόσωπο μιας ευρύτερης κατηγορίας εφαρμογών.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των συγκεκριμένων μοντέλων θα παρουσιάσουμε τη γενική μορφή ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.). Στη γενική περίπτωση ένα π.γ.π. είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης της διανυσματικής μεταβλητής $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, κάτω από ένα σύνολο περιορισμών που εκφράζονται από γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις. Γενικά γράφεται ώς εξής

$$\begin{array}{rrcll}
\max(\min) & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i, & i = 1, \ldots, m_1 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i, & i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \geq & b_i, & i = m_2 + 1, \ldots, m \\
& x_j & \geq & 0, & j = 1, \ldots, n_1 \\
& x_j & \leq & 0, & j = n_1 + 1, \ldots, n_2 \\
& x_j & \in & \mathbb{R}, & j = n_2 + 1, \ldots, n,
\end{array} \tag{1.1}$$

όπου $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$ και $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq n$ ακέραιες διαστάσεις και $b_i, c_j, a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ δοσμένες σταθερές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας στην (1.1) έχουμε υποθέσει ότι οι περιορισμοί έχουν διαταχθεί έτσι ώστε οι πρώτοι m_1 περιορισμοί είναι εξισώσεις οι επόμενοι $m_2 - m_1$ ανισώσεις της μορφής $\leq$ και οι τελευταίοι $m - m_2$ ανισώσεις της μορφής $\geq$. Επίσης οι μεταβλητές απόφασης έχουν διαταχθεί έτσι ώστε οι πρώτες n_1 παίρνουν μη αρνητικές τιμές, οι επόμενες $n_2 - n_1$ μη θετικές και οι τελευταίες $n - n_2$ δεν έχουν κανένα περιορισμό ως προς το πρόσημο.

Στο παραπάνω πρόβλημα η συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ονομάζεται *αντικειμενική συνάρτηση*. Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *εφικτή λύση* αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς. Η *εφικτή περιοχή* F είναι το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων. Μια εφικτή λύση $\mathbf{x}^*$ είναι *βέλτιστη* ή *άριστη* αν πετυχαίνει τη μέγιστη (αντ. ελάχιστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $f(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x} \in F$, για προβλήματα τύπου max (αντ. min).

Η (1.1) είναι η γενικότερη μορφή ενός π.γ.π.. Γνωρίζουμε όμως ότι με κατάλληλους μετασχηματισμούς ένα π.γ.π. μπορεί να γραφεί σε διάφορες ισοδύναμες μορφές που είναι χρήσιμες για τη μαθηματική του ανάλυση. Δύο τέτοιες μορφές είναι η κανονική μορφή που χρησιμοποιείται στη μελέτη των ιδιοτήτων της βέλτιστης λύσης και η ημικανονική μορφή που είναι χρήσιμη στην ανάπτυξη της θεωρίας της δυϊκότητας.

Ένα π.γ.π. είναι σε *κανονική μορφή* αν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι max και επίσης $m_1 = m_2 = m$ και $n_1 = n_2 = n$, δηλαδή όλοι οι περιορισμοί είναι ισότητες και όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές.

Ένα π.γ.π. είναι σε *ημικανονική μορφή* αν το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι max και επίσης $m_1 = 0,\ m_2 = m$ και $n_1 = n_2 = n$, δηλαδή όλοι οι περιορισμοί είναι ανισότητες της μορφής $\leq$ και όλες οι μεταβλητές απόφασης είναι μη αρνητικές.

Φυσικά κατά τη διαδικασία μετασχηματισμού ενός γενικού π.γ.π. σε κανονική ή ημικανονική μορφή ο αριθμός των περιορισμών και των μεταβλητών δε διατηρείται ο ίδιος όπως στο αρχικό πρόβλημα.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συμβολισμό για ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή:

$$\begin{array}{rlrcl} z = & \max & \mathbf{c}'\mathbf{x} & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array}$$

όπου $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ είναι διάνυσμα στήλης, $\mathbf{c}'$ το ανάστροφο του $\mathbf{c}$, $\mathbf{0}$ το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ πίνακας διαστάσεων $m \times n$, και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

1.2 Προγραμματισμός Παραγωγής

Τα προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής αποτελούν μια από τις κυριότερες εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού. Θα εξετάσουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα παρακάτω.

1.2.1 Παραγωγή Πολλών Προϊόντων σε Μία Περίοδο

Θεωρούμε το πρόβλημα παραγωγής μιας εταιρίας που παράγει n προϊόντα χρησιμοποιώντας m κοινούς πόρους (π.χ. πρώτες ύλες, εργασία, κεφάλαιο, χρόνος μηχανημάτων κλπ.). Όλα τα προϊόντα παράγονται και πωλούνται μέσα στην ίδια περίοδο, χωρίς να διατηρείται απόθεμα για επόμενες περιόδους. Η υπόθεση αυτή είναι λογική για προϊόντα άμεσης κατανάλωσης όπως π.χ. εφημερίδες, ψωμί κλπ.. Τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα εξής:

- c_j = κέρδος ανά μονάδα προϊόντος $j, j = 1, \ldots, n$
- b_i = διαθέσιμη ποσότητα πόρου $i, i = 1, \ldots, m$
- a_{ij} = απαιτούμενη ποσότητα πόρου i ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος j
- d_j =ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα προϊόντος j

Ζητείται το σχέδιο παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Για τη μοντελοποίηση ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης ως εξής:

$$x_j = \text{ποσότητα παραγόμενου προϊόντος } j,\ j = 1, \ldots, n.$$

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι το συνολικό κέρδος:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Υπάρχουν επίσης δύο ομάδες περιορισμών. Η πρώτη αναφέρεται στη διαθεσιμότητα των πόρων. Για κάθε πόρο η απαιτούμενη ποσότητα για την παραγωγή των προϊόντων δεν μπορεί να υπερβαίνει τη διαθέσιμη ποσότητα b_i:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Η δεύτερη ομάδα αναφέρεται στις απαιτούμενες ποσότητες:

$$x_j \geq d_j, j = 1, \ldots, n.$$

Τέλος για τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, όλες οι μεταβλητές απόφασης, ως ποσότητες παραγωγής, πρέπει να είναι μή αρνητικές. Βέβαια, αφού $d_j \geq 0$, οι τελευταίοι περιορισμοί συνεπάγονται ότι $x_j \geq 0$, επομένως οι περιορισμοί μη αρνητικότητας είναι στην πραγματικότητα πλεοναστικοί. Παρ' όλα αυτά τους διατηρούμε στο μοντέλο δεδομένου ότι περιλαμβάνονται στην κανονική μορφή. Επομένως το π.γ.π. γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq & d_j, & j = 1, \ldots, n \\ & x_j & \geq & 0, & j = 1, \ldots, n \end{array} \tag{1.2}$$

1.2.2 Παραγωγή Ενός Προϊόντος σε Πολλές Περιόδους

Ας υποθέσουμε ότι η εταιρία παράγει ένα μόνο προϊόν το οποίο όμως μπορεί να διατηρηθεί σε απόθεμα και να πωληθεί σε μεταγενέστερη χρονική περίοδο. Το πρόβλημα επομένως γίνεται δυναμικό δηλαδή πρέπει να βρεθεί η πολιτική παραγωγής ως συνάρτηση του χρόνου. Μια απλουστευμένη μορφή του προβλήματος είναι η εξής: Ο χρονικός ορίζοντας είναι μήκους N, δηλαδή θα πρέπει να ληφθούν N αποφάσεις παραγωγής, η κάθε μια στην αρχή μιας χρονικής περιόδου (π.χ. εβδομάδας ή μήνα). Κατά την περίοδο $t, t = 1, \ldots, N$, η ζήτηση που θα πρέπει να ικανοποιηθεί είναι ίση με d_t και το μοναδιαίο κόστος παραγωγής είναι ίσο με c_t. Επίσης αν μια ποσότητα προϊόντος κρατηθεί ως απόθεμα κατά την περίοδο t έως την επόμενη περίοδο $t + 1$, τότε το κόστος αποθέματος είναι ίσο με h_t ανά μονάδα προϊόντος, για $t = 1, \ldots, N - 1$. Αν στο τέλος της περιόδου N υπάρχει απόθεμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί, το κόστος του ανά μονάδα είναι ίσο με h_N (αυτό το τελευταίο κόστος μπορεί να είναι και αρνητικό στην περίπτωση που το τελικό απόθεμα έχει αξία και μπορεί να πωληθεί). Υποθέτουμε ότι υπάρχουν απεριόριστες ποσότητες των απαιτούμενων για την παραγωγή πόρων σε κάθε περίοδο, οπότε δεν υπάρχει περιορισμός στην ποσότητα παραγωγής. Τόσο η παραγωγή όσο και η πώληση του προϊόντος γίνονται ακαριαία στην αρχή κάθε περιόδου. Επίσης η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιηθεί ακριβώς, δηλαδή δεν επιτρέπονται ελλείψεις. Τέλος υποθέτουμε ότι στην αρχή της περιόδου 1 υπάρχει ήδη στην αποθήκη ποσότητα προϊόντος ίση με I_1.

Το πρόβλημα είναι να βρεθούν οι ποσότητες παραγωγής σε κάθε περίοδο έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος παραγωγής και αποθεμάτων στη διάρκεια του ορίζοντα προγραμματισμού.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου π.γ.π. για αυτή την κατηγορία προβλημάτων οι κατάλληλες μεταβλητές απόφασης είναι

$$x_t = \text{ποσότητα παραγωγής κατά την περίοδο } \; t, t = 1, \ldots, N$$

και

$$I_t = \text{μέγεθος αποθέματος στην αρχή της περιόδου } \; t, t = 2, \ldots, N+1.$$

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη του προβλήματος σημειώνουμε ότι η μεταβλητή I_{N+1} παριστάνει το τελικό απόθεμα μετά το τέλος του ορίζοντα. Επίσης η ποσότητα I_1 δηλαδή το αρχικό απόθεμα είναι δοσμένη παράμετρος του προβλήματος και όχι μεταβλητή απόφασης.

Για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης έχουμε ότι το συνολικό κόστος αποτελείται από το κόστος παραγωγής και το κόστος αποθεμάτων. Το κόστος παραγωγής κατά την περίοδο t είναι ίσο με $c_t x_t$. Για το κόστος αποθεμάτων, παρατηρούμε ότι στην περίοδο t η παραγωγή και οι πωλήσεις γίνονται στην αρχή, επομένως κατά τη διάρκεια της περιόδου η ποσότητα που διατηρείται σε απόθεμα είναι ίση με την ποσότητα I_{t+1} που θα είναι διαθέσιμη στην αρχή της επόμενης περιόδου. Συνεπώς, το κόστος αποθέματος που προκύπτει κατά την περίοδο t είναι ίσο με $h_t I_{t+1}$. Ισοδύναμα μπορούμε να δούμε ότι το απόθεμα I_t που υπάρχει στην αρχή της περιόδου t διατηρήθηκε στην αποθήκη κατά τη διάρκεια της προηγούμενης περιόδου $t-1$, και το κόστος που προέκυψε κατά τη διατήρησή του είναι ίσο με $h_{t-1} I_t$. Με βάση τα παραπάνω το συνολικό κόστος είναι ίσο με

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{I}) = \sum_{t=1}^{N} c_t x_t + \sum_{t=1}^{N} h_t I_{t+1}.$$

Οι μόνοι περιορισμοί που αναφέρονται ρητά είναι ότι πρέπει να ικανοποιηθεί η ζήτηση σε κάθε περίοδο. Ας δούμε τι γίνεται την περίοδο t. Στην αρχή της περιόδου υπάρχει απόθεμα I_t και παράγεται μια ποσότητα x_t. Επομένως η συνολική ποσότητα που είναι διαθέσιμη για πώληση είναι ίση με $I_t + x_t$. Από αυτή μια ποσότητα d_t θα πωληθεί και το υπόλοιπο θα μεταφερθεί ως απόθεμα I_{t+1} στην αρχή της επόμενης περιόδου. Επομένως οι ποσότητες αυτές συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$I_t + x_t = d_t + I_{t+1}, \; t = 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι εξισώσεις (1.3) επιτελούν διπλό σκοπό. Πρώτα εξασφαλίζουν ότι οι μεταβλητές I_t και x_t συνδέονται μεταξύ τους και δεν μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές. Επιπρόσθετα όμως εξασφαλίζουν ότι σε κάθε περίοδο υπάρχει η απαραίτητη ποσότητα για να ικανοποιηθεί η ζήτηση. Πραγματικά, αν απαιτήσουμε οι μεταβλητές x_t, I_t να είναι όλες μη αρνητικές, τότε από την παραπάνω εξίσωση, αφού

$I_{t+1} \geq 0$, προκύπτει ότι $I_t + x_t \geq d_t$, δηλαδή η ζήτηση της περιόδου t μπορεί να ικανοποιηθεί εξ ολοκλήρου. Δεν χρειάζονται επομένως ξεχωριστοί περιορισμοί για να εξασφαλιστεί ότι δε θα προκύψουν ελλείψεις.

Τελικά το π.γ.π. γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{lllll} \min & \sum_{t=1}^{N} c_t x_t + \sum_{t=1}^{N} h_t I_{t+1} & & & \\ \text{υ.π.} & I_t + x_t - I_{t+1} & = & d_t, & t = 1, \ldots, N. \\ & x_t & \geq & 0, & t = 1, \ldots, N \\ & I_t & \geq & 0, & t = 2, \ldots, N+1 \end{array} \tag{1.4}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή των παραπάνω μεταβλητών απόφασης δεν είναι η μόνη δυνατή. Πραγματικά από την (1.3) βλέπουμε ότι $I_{t+1} = I_t + x_t = d_t$. Επομένως,

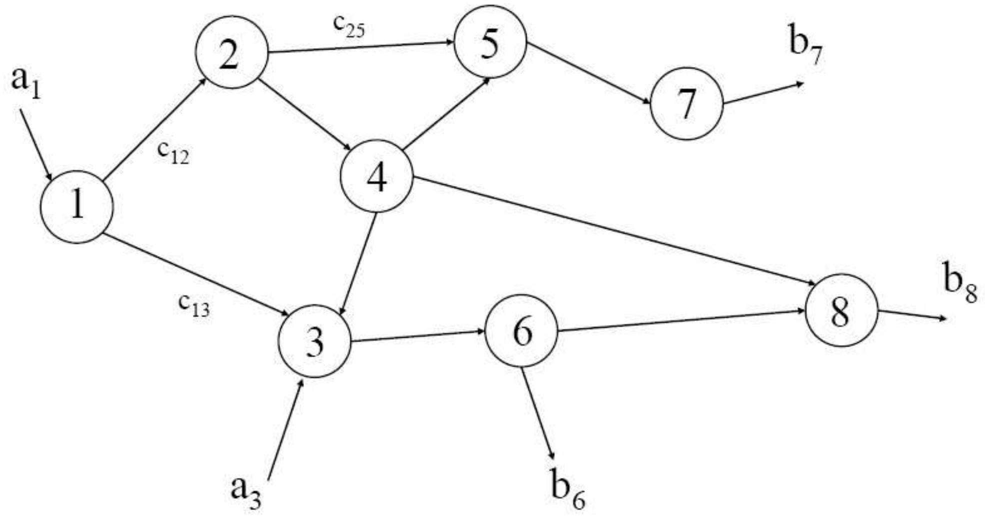
$$\begin{array}{lll} I_2 & = & I_1 + x_1 - d_1 \\ I_3 & = & I_2 + x_2 - d_2 = I_1 + x_1 + x_2 - (d_1 + d_2), \\ \ldots & & \end{array}$$

δηλαδή οι I_t μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των x_t, και να παραλειφθούν από το μοντέλο. Με τον τρόπο αυτό θα είχαμε ένα π.γ.π. με N μεταβλητές απόφασης αντί $2N$ που έχουμε τώρα. Από την άλλη πλευρά όμως η διαμόρφωση της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών θα γινόταν πολύ πιο πολύπλοκη. Γι αυτό το λόγο στην πλειονότητα των εφαρμογών προγραμματισμού παραγωγής ακολουθείται η προσέγγιση να χρησιμοποιούνται ξεχωριστές μεταβλητές για τις ποσότητες αποθέματος. Οι μεταβλητές αυτές συχνά αναφέρονται ως *βοηθητικές μεταβλητές*, επειδή η χρήση τους δεν είναι απαραίτητη, και μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των υπόλοιπων. Η χρήση ή όχι βοηθητικών μεταβλητών γενικά διευκολύνει την έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών ενός π.γ.π., δε θα πρέπει όμως να γίνεται αλόγιστα καθώς η εισαγωγή τους αυξάνει τη διάσταση του προβλήματος.

Το δυναμικό πρόβλημα παραγωγής που παρουσιάσαμε σ' αυτή την παράγραφο βασίζεται σε αρκετές απλουστευτικές παραδοχές, ο σκοπός των οποίων ήταν να εκφραστούν με σαφήνεια και απλότητα οι βασικές ιδέες της μοντελοποίησης τέτοιου είδους εφαρμογών. Είναι σχετικά εύκολο να τροποποιηθεί αυτό το αρχικό μοντέλο για να ληφθούν υπ' όψη στοιχεία όπως περισσότερα από ένα προϊόντα, περιορισμένη διαθεσιμότητα πρώτων υλών σε κάθε περίοδο, περιορισμένη χωρητικότητα αποθηκευτικού χώρου κλπ.. Τέτοιες επεκτάσεις αναφέρονται στις ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου.

1.3 Προβλήματα Ροής σε Δίκτυα

Οι εφαρμογές αυτής της κατηγορίας έχουν τα παρακάτω κοινά χαρακτηριστικά. Υπάρχει ένα προϊόν που διανέμεται πάνω σε ένα δίκτυο εγκαταστάσεων. Το δίκτυο αποτελείται από κόμβους οι οποίοι αντιστοιχούν σε αρχικούς, ενδιάμεσους ή τερματικούς σταθμούς για την κυκλοφορία του προϊόντος, και από ακμές που συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους και αντιστοιχούν σε δυνατές διαδρομές για τη μεταφορά του προϊόντος. Το προϊόν μπορεί να είναι κάποιο υλικό αγαθό που μεταφέρεται από τις εγκαταστάσεις παραγωγής στους σταθμούς πώλησης μέσω ενός δικτύου διανομής. Μπορεί όμως να είναι και μια μη



Σχήμα 1.1: Δίκτυο Διανομής

υλική οντότητα, όπως π.χ. μια ραδιοφωνική εκπομπή ή ένα πακέτο τηλεπικοινωνίας που αναμεταδίδεται μέσω ενός δικτύου κεραιών ή/και δορυφόρων από το σημείο εκπομπής σε ένα ή περισσότερα σημεία τελικής λήψης.

Το δίκτυο αντιστοιχεί μαθηματικά σε ένα γράφημα κόμβων και ακμών όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Στο γράφημα οι κόμβοι αντιστοιχούν σε εγκαταστάσεις (π.χ. εργοστάσια παραγωγής, διαμετακομιστικούς σταθμούς, αποθήκες, σημεία πώλησης κλπ) και οι ακμές σε διόδους απευθείας μεταφοράς μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων. Οι ακμές είναι κατευθυνόμενες και επιτρέπουν τη μεταφορά από τον αρχικό προς τον τελικό κόμβο της ακμής. Για παράδειγμα στο δίκτυο του Σχήματος 1.1 είναι δυνατό να γίνει απευθείας μεταφορά προϊόντος από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2 αλλά όχι από τον 2 στον 1. Επίσης είναι δυνατό να γίνει μεταφορά από τον 1 στον 5 αλλά όχι άμεσα. Αυτή μπορεί να γίνει με μια από τις σύνθετες διαδρομές $1 \to 2 \to 5$ και $1 \to 2 \to 4 \to 5$.

Γενικά ένα δίκτυο μεταφοράς ορίζεται ως ένα πεπερασμένο σύνολο κόμβων V, που χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο $\{1, \ldots, N\}$ για κάποιο $N < \infty$, και ένα σύνολο ακμών E. Μια ακμή προσδιορίζεται μονοσήμαντα από ένα διατεταγμένο ζεύγος (i, j) με $i, j \in V, i \neq j$. Επομένως το σύνολο των ακμών είναι $E \subset V \times V$.

Σε κάθε ακμή (i, j) αντιστοιχεί ένα κόστος c_{ij} και μια χωρητικότητα (capacity) v_{ij}. Το c_{ij} αντιπροσωπεύει το κόστος ανά μονάδα μεταφερόμενης ποσότητας κατά μήκος της ακμής (i, j) και το v_{ij} τη μέγιστη ποσότητα που μπορεί να μεταφερθεί κατά μήκος της ακμής.

Τέλος σε κάθε κόμβο i αντιστοιχούν η διαθέσιμη (εισερχόμενη) και απαιτούμενη (εξερχόμενη) ποσότητα a_i και b_i αντίστοιχα. Η a_i συμβολίζει μια ποσότητα προϊόντος που είναι διαθέσιμη στον κόμβο i από εξωτερικές πηγές. Η b_i συμβολίζει ποσότητα προϊόντος που απαιτείται να διατεθεί από τον κόμβο i σε εξωτερικούς προορισμούς. Η εισερχόμενη ποσότητα a_i μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για να καλύψει μέρος ή όλη την απαίτηση για την εξερχόμενη ποσότητα στον ίδιο κόμβο i, είτε για να μεταφερθεί μέσω του δικτύου σε άλλους κόμβους. Αντίστοιχα, η απαιτούμενη ποσότητα b_i μπορεί να καλυφθεί είτε από τυχόν διαθέσιμη ποσότητα του ίδιου κόμβου είτε από ποσότητες που έχουν μεταφερθεί στον κόμβο i από άλλους κόμβους.

1.3.1 Το πρόβλημα διαμετακομιδής

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης που ανακύπτουν αναφέρονται στον προσδιορισμό ποσοτήτων που μεταφέρονται κατά μήκος των ακμών έτσι ώστε να βελτιστοποιείται κάποιο κριτήριο. Το πιο γενικό πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι το *πρόβλημα διαμετακομιδής (capacitated transshipment problem)* που ορίζεται ως εξής: Να προσδιοριστούν οι μεταφερόμενες ποσότητες που ικανοποιούν τις διαθέσιμες και απαιτούμενες ποσότητες σε κάθε κόμβο, δεν υπερβαίνουν τις χωρητικότητες των ακμών και ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Για τη μοντελοποίηση προβλημάτων ροής σε δίκτυα όπως αυτό, η τυπική προσέγγιση είναι να ορίζονται ως μεταβλητές απόφασης οι ποσότητες που μεταφέρονται κατά μήκος των ακμών, δηλαδή

$$x_{ij} = \text{ποσότητα που μεταφέρεται κατά μήκος της ακμής } \ (i,j), \quad (i,j) \in E,$$

επομένως η διάσταση του διανύσματος των μεταβλητών απόφασης είναι ίση με $n = |E|$, δηλαδή τον αριθμό των ακμών.

Για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η αντικειμενική συνάρτηση, που είναι το συνολικό κόστος μεταφοράς, εκφράζεται ως εξής:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}.$$

Οι περιορισμοί είναι δύο ειδών. Κατά πρώτον πρέπει να εξασφαλίζεται ότι η συνολική ποσότητα που εξέρχεται από κάθε κόμβο, είτε για να μεταφερθεί σε άλλους κόμβους ή για να ικανοποιήσει τις εξωτερικές απαιτήσεις του κόμβου, δεν μπορεί να υπερβαίνει τη συνολική εισερχόμενη ποσότητα στον κόμβο, που προέρχεται από τη διαθέσιμη εξωτερική ποσότητα και ποσότητες που μεταφέρονται από άλλους κόμβους. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς οι περιορισμοί αυτοί γράφονται ως εξής:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} + b_i \le \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} + a_i,$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \ge b_i - a_i, \ i = 1, \ldots, N.$$

Οι περιορισμοί αυτοί αναφέρονται γενικά ως *περιορισμοί ροής (flow constraints).*

Η δεύτερη κατηγορία περιορισμών εξασφαλίζει ότι δεν παραβιάζονται οι χωρητικότητες των ακμών, δηλαδή

$$x_{ij} \le v_{ij}, \quad (i,j) \in E.$$

Οι περιορισμοί αυτοί αναφέρονται γενικά ως *περιορισμοί χωρητικότητας (capacity constraints).*

Επομένως το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι συνοπτικά το παρακάτω:

$$\begin{array}{llcrl} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \geq & b_i - a_i, & i = 1, \ldots, N. \\ & x_{ij} & \leq & v_{ij}, & (i,j) \in E \\ & x_{ij} & \geq & 0, & (i,j) \in E \end{array} \tag{1.5}$$

Στο μοντέλο (1.5) παρατηρούμε ότι η εξάρτηση από τις παραμέτρους $a_i, b_i, i = 1, \ldots, N$ είναι μόνο μέσω των διαφορών $a_i - b_i$. Η ποσότητα $a_i - b_i$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η καθαρή διαθέσιμη ποσότητα στον κόμβο i, δηλαδή το υπόλοιπο από τη διαθέσιμη ποσότητα που απομένει όταν αφαιρεθούν οι εξωτερικές απαιτήσεις. Η ποσότητα αυτή μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική αν μετά την αφαίρεση παραμένει στον κόμβο υπόλοιπο διαθέσιμης ποσότητας ή υπόλοιπο απαίτησης αντίστοιχα. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάθε κόμβο i έχουμε $a_i = 0$ ή $b_i = 0$ ή και τα δύο, δηλαδή σε κάθε κόμβο υπάρχει είτε διαθέσιμη ποσότητα ή εξωτερική απαίτηση αλλά όχι και τα δύο ταυτόχρονα. Συνεπώς το σύνολο των κόμβων μπορεί να διαμεριστεί σε τρία υποσύνολα

$$V_s = \{i \in V \mid a_i > 0, b_i = 0\},\ V_d = \{i \in V \mid a_i = 0, b_i > 0\},\ V_t = \{i \in V \mid a_i = b_i = 0\}$$

Τα σύνολα V_s, V_d, V_t ονομάζονται σύνολα πηγών (source), προορισμών (destination) και διαμετακομιδής (transshipment) αντίστοιχα.

Μερικές ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις του γενικού προβλήματος διαμετακομιδής (1.5) παρουσιάζονται παρακάτω.

1.3.2 Το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους

Το *πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους (min-cost flow problem)* ορίζεται ως ένα πρόβλημα διαμετακομιδής στο οποίο δεν υπάρχουν περιορισμοί χωρητικότητας στις ακμές, ή ισοδύναμα κάθε ακμή μπορεί να δεχθεί οποιαδήποτε μεταφερόμενη ποσότητα. Επομένως προκύπτει από το πρόβλημα (1.5) θέτοντας $v_{ij} = \infty$. Συνοπτικά το πρόβλημα γράφεται ως εξής.

$$\begin{array}{llcrl} \min & \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \geq & b_i - a_i, & i = 1, \ldots, N. \\ & x_{ij} & \geq & 0, & (i,j) \in E \end{array} \tag{1.6}$$

1.3.3 Το πρόβλημα μεταφοράς

Το *πρόβλημα μεταφοράς (transportation problem)* ορίζεται ως ένα πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους στο οποίο δεν υπάρχουν διαμετακομιστικοί κόμβοι ενώ υπάρχει μια ακμή από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό. Επομένως στο πρόβλημα αυτό πρέπει να μεταφερθούν ποσότητες από τους κόμβους-πηγές στους κόμβους- προορισμούς. Το πρόβλημα προκύπτει από το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους (1.6) θέτοντας $V_t = \emptyset, E = V_s \times V_d$. Με αυτές τις υποθέσεις το π.γ.π. παίρνει αρκετά απλούστερη μορφή. Συγκεκριμένα, για κάθε κόμβο-πηγή $i \in V_s$ έχουμε $a_i > 0, b_i = 0$. Επίσης το σύνολο των εισερχόμενων ακμών στον κόμβο είναι κενό ενώ το σύνολο των εξερχόμενων ακμών είναι το σύνολο V_d των προορισμών. Επομένως ο περιορισμός ροής για τον κόμβο i

$$\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \geq b_i - a_i$$

απλοποιείται στον παρακάτω

$$\sum_{j\in V_d} x_{ij} \leq a_i.$$

Όμοια προκύπτει ότι για κάθε κόμβο-προορισμό $j \in V_d$ ο περιορισμός γράφεται ισοδύναμα

$$\sum_{i\in V_s} x_{ij} \geq b_j.$$

Επομένως το πρόβλημα μεταφοράς αντιστοιχεί στο παρακάτω π.γ.π.

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j\in V_d} x_{ij} & \leq & a_i, & i\in V_s \\ & \sum_{i\in V_s} x_{ij} & \geq & b_j, & j\in V_d \\ & x_{ij} & \geq & 0, & i\in V_s,\ j\in V_d \end{array} \tag{1.7}$$

Ένα πρόβλημα μεταφοράς ονομάζεται *ισορροπημένο (balanced)* αν ισχύει $\sum_{i\in V_s} a_i = \sum_{j\in V_d} b_j$, δηλαδή η συνολική διαθέσιμη ποσότητα στις πηγές είναι ίση με τη συνολικά απαιτούμενη ποσότητα στους περιορισμούς. Για ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς περιμένουμε διαισθητικά ότι για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί, όλες οι διαθέσιμες ποσότητες πρέπει να μεταφερθούν από τις πηγές κατά τέτοιο τρόπο ώστε κάθε προορισμός να λάβει ακριβώς την απαιτούμενη ποσότητα. Με άλλα λόγια οι περιορισμοί στο πρόβλημα (1.7) θα ικανοποιούνται με ισότητα. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.1 *Σε ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς ένα διάνυσμα* $\mathbf{x} = (x_{ij}, i \in V_s, j \in V_d) \geq \mathbf{0}$ *είναι εφικτή λύση αν και μόνο αν*

$$\begin{aligned} \sum_{j\in V_d} x_{ij} &= a_i, \quad i\in V_s \\ \sum_{i\in V_s} x_{ij} &= b_j, \quad j\in V_d \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Είναι προφανές ότι αν το $\mathbf{x}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς με ισότητα είναι εφικτή λύση. Για να δείξουμε το αντίστροφο, από τους περιορισμούς του γενικού προβλήματος μεταφοράς (1.7) προκύπτει (αθροίζοντας τις ανισότητες των πηγών) ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathbf{x}$ εφικτή λύση είναι

$$\sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} x_{ij} \leq \sum_{i\in V_s} a_i$$

όπως επίσης (αθροίζοντας τις ανισότητες των προορισμών)

$$\sum_{j\in V_d}\sum_{i\in V_s} x_{ij} \geq \sum_{j\in V_d} b_j.$$

Για ένα ισορροπημένο πρόβλημα οι παραπάνω συνθήκες καταλήγουν στην

$$\sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} x_{ij} = \sum_{i\in V_s} a_i = \sum_{j\in V_d} b_j.$$

Επομένως, αν το $\mathbf{x}$ ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του (1.7) και έναν ή περισσότερους με αυστηρή ανισότητα, τότε η παραπάνω συνθήκη παραβιάζεται, που είναι άτοπο. Συνεπώς όλοι οι περιορισμοί θα πρέπει να ισχύουν ως ισότητες. □

Από το Λήμμα 1.1 προκύπτει η εξής ισοδύναμη μορφή του π.γ.π. για ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum_{i\in V_s}\sum_{j\in V_d} c_{ij}x_{ij} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j\in V_d} x_{ij} & = & a_i, & i\in V_s \\ & \sum_{i\in V_s} x_{ij} & = & b_j, & j\in V_d \\ & x_{ij} & \geq & 0, & i\in V_s,\ j\in V_d \end{array} \tag{1.8}$$

Η υπόθεση ότι ένα πρόβλημα μεταφοράς είναι ισορροπημένο μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας, όπως προκύπτει από την Άσκηση 1.5.

1.3.4 Το πρόβλημα μέγιστης ροής

Το *πρόβλημα μέγιστης ροής (maximum flow problem)* ορίζεται ως το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνολικής ποσότητας που μπορεί να μεταφερθεί από ένα αρχικό κόμβο σε ένα τελικό κόμβο του δικτύου, κάτω από τους περιορισμούς χωρητικότητας των ακμών. Δεδομένου ότι η αρίθμηση των κόμβων είναι αυθαίρετη, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι μεγιστοποιούμε τη ροή από τον κόμβο 1 στον κόμβο N. Θα δούμε ότι και το πρόβλημα αυτό προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προβλήματος διαμετακομιδής.

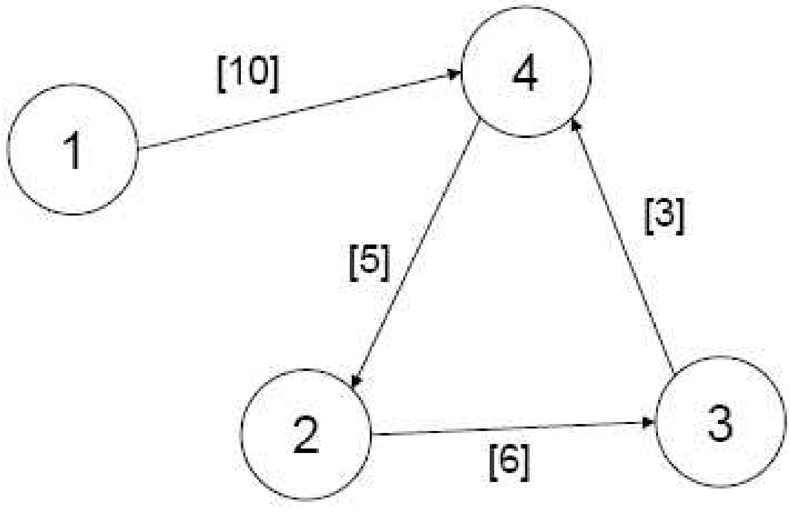
Στο πρόβλημα μέγιστης ροής η μοναδική πηγή είναι ο κόμβος 1 και ο μοναδικός προορισμός ο κόμβος N. Μπορούμε να το θεωρήσουμε ως ένα πρόβλημα όπου υπάρχει απεριόριστη διαθέσιμη ποσότητα στον κόμβο 1 και μηδενικές διαθεσιμότητες στους υπόλοιπους κόμβους ενώ πρέπει να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα που καταλήγει στον κόμβο N. Επομένως θα μπορούσαμε να πάρουμε ως αντικειμενική συνάρτηση τη συνολική ποσότητα που εισέρχεται στον κόμβο N, δηλαδή $\sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN}$ και να απαιτήσουμε μεγιστοποίηση. Η προσέγγιση αυτή όμως δεν είναι σωστή. Για να δούμε πού πάσχει, ας θεωρήσουμε το δίκτυο του Σχήματος 1.2, όπου ζητείται να μεγιστοποιηθεί η ροή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4 και οι ποσότητες μέσα στις αγκύλες δηλώνουν τις χωρητικότητες των ακμών. Είναι προφανές ότι η μέγιστη ροή ισούται με 10 και επιτυγχάνεται θέτοντας

$$x_{14} = 10, x_{42} = x_{23} = x_{34} = y,$$

για οποιοδήποτε $y \in [0, 3]$. Αν όμως θεωρήσουμε ως αντικειμενική συνάρτηση τη συνολική εισερχόμενη ποσότητα στον κόμβο 4, που είναι ίση με $x_{14} + x_{34}$, αυτή μεγιστοποιείται για

$$x_{14} = 10, x_{42} = x_{23} = x_{34} = 3,$$

και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 13, που δεν αντιστοιχεί στην πραγματική βέλτιστη τιμή του προβλήματος μέγιστης ροής.



Σχήμα 1.2: Παράδειγμα Μέγιστης Ροής

Βλέπουμε επομένως ότι η σωστή αντικειμενική συνάρτηση που μεγιστοποιείται είναι η καθαρή ποσότητα που μένει στον κόμβο N και είναι διαθέσιμη να ικανοποιήσει εξωτερικές απαιτήσεις, δηλαδή

$$\sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN} - \sum_{j:(N,j)\in E} x_{Nj}.$$

Επειδή στο πρόβλημα διαμετακομιδής έχουμε ελαχιστοποίηση, για να προκύψει το παρόν πρόβλημα ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\max_{x\in F} f(x) = -\min_{x\in F} f(-x)$$

και να θέσουμε ως συνάρτηση κόστους ακμών την

$$c_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{αν } j = N,\ (i,N)\in E \\ 1, & \text{αν } i = N,\ (N,j)\in E \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Όσον αφορά τους περιορισμούς, όπως αναφέραμε προηγουμένως, υποθέτουμε ότι υπάρχει απεριόριστη διαθέσιμη ποσότητα στην πηγή, ενώ στον προορισμό δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την απαιτούμενη ποσότητα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η ποσότητα που μεταφέρεται από την πηγή στον προορισμό περιορίζεται μόνο από τις χωρητικότητες των ακμών, όπως απαιτεί το πρόβλημα, και όχι από συγκεκριμένες διαθεσιμότητες ή απαιτήσεις. Επομένως οι περιορισμοί του προβλήματος διαμετακομιδής ισχύουν και στο παρόν πρόβλημα με

$$a_1 = \infty,\ a_i = 0\ \forall i \neq 1,\ b_j = 0\ \forall j\in V.$$

Δείξαμε ότι το πρόβλημα μέγιστης ροής μπορεί να εκφραστεί ως ειδική περίπτωση του προβλήματος (1.5) με τις παραπάνω επιλογές συναρτήσεων κόστους, διαθεσιμότητας και απαιτήσεων. Εναλλακτικά μπορεί να γραφεί σε κάπως απλούστερη ισοδύναμη μορφή ως εξής. Από τον ορισμό των a, b προκύπτει ότι ο περιορισμός ροής για τον κόμβο 1 γίνεται

$$\sum_{k:(k,1)\in E} x_{k1} - \sum_{j:(1,j)\in E} x_{1j} \geq -\infty,$$

που είναι πλεοναστικός και μπορεί να παραληφθεί, ενώ οι υπόλοιποι περιορισμοί ροής γίνονται

$$\sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} \geq 0,\ i = 2, \ldots, N.$$

Επομένως το π.γ.π. μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως

$$\begin{array}{lllll} \max & \sum_{i:(i,N)\in E} x_{iN} - \sum_{j:(N,j)\in E} x_{Nj} & & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{k:(k,i)\in E} x_{ki} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & \geq & 0, & i = 2, \ldots, N. \\ & x_{ij} & \leq & v_{ij}, & (i,j) \in E \\ & x_{ij} & \geq & 0, & (i,j) \in E \end{array} \tag{1.9}$$

1.4 Προβλήματα Προγραμματισμού Εργασίας

Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ασχολούνται με τον προγραμματιστμό προσωπικού και ωραρίων σε μια εταιρεία ή οργανισμό που απασχολεί πολλούς εργαζόμενους και έχει διαφορετικές ανάγκες σε προσωπικό σε διάφορες χρονικές περιόδους. Τα παρακάτω δύο παραδείγματα είναι χρήσιμα για την κατ' αρχήν κατανόηση του προβλήματος.

Ως πρώτο παράδειγμα θεωρούμε ένα νοσοκομείο που πρέπει να προγραμματίσει τον αριθμό του νοσηλευτικού προσωπικού σε εβδομαδιαία βάση. Επειδή το νοσοκομείο κάποιες μέρες είναι σε εφημερία και κάποιες όχι, οι ανάγκες σε προσωπικό είναι γενικά διαφορετικές κάθε μέρα της εβδομάδας. Από την άλλη πλευρά κάθε εργαζόμενος στο νοσοκομείο έχει συνεχόμενο πενθήμερο ωράριο, δηλαδή εργάζεται πέντε συνεχόμενες μέρες κάθε εβδομάδα και τις άλλες δύο παίρνει ρεπό. Επειδή το νοσοκομείο είναι συνέχεια ανοιχτό, δεν μπορούν όλοι οι εργαζόμενοι να παίρνουν ρεπό τις ίδιες μέρες όπως γίνεται π.χ. σε μια εμπορική εταιρεία που είναι κλειστή το σαββατοκύριακο. Επομένως κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μιά από επτά κατηγορίες ωραρίου (βάρδιες), ανάλογα με τις μέρες της εβδομάδας που εργάζεται (στην κατηγορία 1 ανήκουν οι εργαζόμενοι από Δευτέρα μέχρι Παρασκευή, στην κατηγορία 2 αυτοί από Τρίτη μέχρι Σάββατο, κ.ο.κ.). Επειδή σε κάποιες βάρδιες οι εργαζόμενοι απασχολούνται Σάββατο ή και Κυριακή, το εβδομαδιαίο κόστος του νοσοκομείου για κάθε εργαζόμενο διαφέρει ανάλογα με τη βάρδια. Το πρόβλημα του νοσοκομείου είναι να βρεθεί πόσοι εργαζόμενοι πρέπει να προσληφθούν σε κάθε βάρδια ώστε αφενός να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις σε προσωπικό κάθε μέρα της εβδομάδας και αφ' ετέρου να ελαχιστοιποιηθεί το συνολικό κόστος των εργαζομένων.

Για ένα δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το υποκατάστημα μιας τράπεζας που λειτουργεί για το κοινό από 8 π.μ. έως 8 μ.μ. κάθε εργάσιμη μέρα. Από προηγούμενες στατιστικές αναλύσεις είναι γνωστό ότι οι ανάγκες σε προσωπικό διαφέρουν ανάλογα με την ώρα της μέρας (π.χ. κατά το δίωρο 8-10 μ.μ. χρειάζεται να λειτουργούν 3 ταμεία, κατά το δίωρο 10-12 6 ταμεία κ.ο.κ.). Το προσωπικό της τράπεζας εργάζεται 8 ώρες τη μέρα, αλλά σε διάφορες βάρδιες. Για παράδειγμα κάποιοι εργαζόμενοι απασχολούνται συνεχόμενα στο διάστημα 8 π.μ.-4 μ.μ., κάποιοι από τις 12 έως τις 8 μ.μ. και κάποιοι άλλοι 8 π.μ. με 12 και 4 μ.μ. με 8 μ.μ. . Ανάλογα με το ωράριο το κόστος για κάθε εργαζόμενο μπορεί να διαφέρει. Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, το πρόβλημα της τράπεζας είναι να βρεθεί πόσοι εργαζόμενοι πρέπει να απασχολούνται σε κάθε βάρδια ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις σε προσωπικό σε όλη τη διάρκεια της μέρας και επίσης το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται.

Για τη μαθηματική διατύπωση του γενικού προβλήματος ορίζουμε τα παρακάτω. Έστω ότι πρέπει να οργανωθούν τα ωράρια του προσωπικού με βάση ένα ορίζοντα προγραμματισμού (εβδομάδα, ημέρα, κ.λ.π.). Ο ορίζοντας διαιρείται σε m περιόδους ανάλογα με τις ανάγκες σε προσωπικό (οι περίοδοι δεν είναι απαραίτητο να έχουν το ίδιο μήκος). Σε κάθε περίοδο $i = 1, \ldots, m$ απαιτείται να υπάρχουν τουλάχιστον d_i άτομα που απασχολούνται κατά τη διάρκεια της περιόδου. Οι εργαζόμενοι στον οργανισμό κατατάσσονται σε n κατηγορίες (βάρδιες) ανάλογα με το ωράριο εργασίας τους. Το κόστος ανά εργαζόμενο της κατηγορίας j είναι ίσο με c_j για όλη τη διάρκεια του ορίζοντα προγραμματισμού, για $j = 1, \ldots, n$. Τέλος το διάστημα στο οποίο εργάζονται οι εργαζόμενοι κάθε κατηγορίας καθορίζεται από ένα πίνακα συντελεστών $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ που ορίζονται ως εξής

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο εργαζόμενος στη βάρδια } i \text{ είναι διαθέσιμος κατά την περίοδο } j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Στον ορισμό του a_{ij} έχουμε υποθέσει ότι αν ένας εργαζόμενος απασχολείται σε κάποια περίοδο i, τότε είναι διαθέσιμος για όλη τη διάρκεια και όχι για μέρος της περιόδου. Αυτό σημαίνει ότι ο χωρισμός του ορίζοντα σε περιόδους και ο καθορισμός των διαφόρων κατηγοριών ωραρίου έχει γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε βάρδια να καλύπτει ένα ακέραιο αριθμό περιόδων. (Για παράδειγμα στην περίπτωση της τράπεζας παραπάνω, αν ο ορίζοντας προγραμματισμού 8 π.μ. - 8 μ.μ. διαιρεθεί σε 6 δίωρα, τότε μια βάρδια επιτρέπεται να διαρκεί από τις 8 π.μ. έως τις 4 μ.μ., αλλά όχι από τις 9 μ.μ. έως τις 5 μ.μ. γιατί τότε θα κάλυπτε μέρος μόνο του διώρου 8 π.μ. - 10 μ.μ.)

Με βάση τα παραπάνω, η μοντελοποίηση του προβλήματος με γραμμικό προγραμματισμό είναι μάλλον προφανής. Ορίζουμε ως μεταβλητές απόφασης τις ποσότητες $x_j =$ αριθμός εργαζομένων που απασχολούνται σύμφωνα με το ωράριο j, $j = 1, \ldots, n$. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση, που είναι το συνολικό κόστος εργασίας κατά τη διάρκεια του ορίζοντα προγραμματισμού είναι ίση με

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Οι περιορισμοί αντανακλούν τις ελάχιστες απαιτήσεις σε προσωπικό για κάθε περίοδο του ορίζοντα προγραμματισμού. Από τους προηγούμενους ορισμούς προκύπτει ότι ο αριθμός των εργαζομένων που είναι διαθέσιμοι κατά τη διάρκεια της περιόδου i είναι ίσος με $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Δεδομένης της ελάχιστης απαίτησης d_i, ο περιορισμός για την περίδο i γράφεται

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq d_i.$$

Τελικά το π.γ.π. γράφεται ως εξής

$$\begin{array}{lrcl}\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{υ.π.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \geq & d_i, \quad i=1,\ldots,m \\ & x_j & \geq & 0, \quad j=1,\ldots,n\end{array} \tag{1.10}$$

1.5 Τμηματικά Γραμμικές Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Στα παραδείγματα π.γ.π. που είδαμε παραπάνω τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί προέκυψαν να έχουν γραμμική μορφή από τη φύση και την περιγραφή του αντίστοιχου προβλήματος. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που μια ή περισσότερες συνιστώσες ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις, αλλά παρ' όλ' αυτά το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π. με τη βοήθεια κατάλληλων μετασχηματισμών. Σ' αυτό το υποκεφάλαιο θα δούμε περιπτώσεις τμηματικά γραμμικών συναρτήσεων που επιτρέπουν μοντελοποίηση με γραμμικό προγραμματισμό.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$f(\mathbf{x}) = \min\{\mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, i = 1,\ldots,k\},$$

όπου $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^n, e_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,k$, είναι τμηματικά γραμμική. Είναι επίσης κοίλη, όπως προκύπτει εύκολα από το Λήμμα ** στο Παράρτημα. Επειδή το ελάχιστο ενός πεπερασμένου συνόλου ισούται με το μεγαλύτερο αριθμό που είναι μικρότερος ή ίσος από όλα τα στοιχεία του συνόλου, για δοσμένο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η $f(\mathbf{x})$ μπορεί να γραφτεί ως λύση του παρακάτω π.γ.π. με μόνη μεταβλητή απόφασης τη z:

$$\begin{array}{rlrcl}f(\mathbf{x}) = & \max & z & & \\ & \text{υ.π.} & z & \leq & \mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, \quad i=1,\ldots,k.\end{array}$$

Επομένως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{rlrcl}z_{PW} = & \max & f(\mathbf{x}) & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0},\end{array} \tag{1.11}$$

όπου η f είναι τμηματικά γραμμική κοίλη συνάρτηση, μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π. με $n+1$ μεταβλητές απόφασης $(z, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rlrcl}z_{LP} = & \max & z & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & z & \leq & \mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, \quad i=1,\ldots,k \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}.\end{array} \tag{1.12}$$

Η ισοδυναμία μεταξύ των δύο προβλημάτων προκύπτει από το Λήμμα 1.2 και την Πρόταση 1.1 παρακάτω.

Λήμμα 1.2 *Έστω ότι το πρόβλημα (1.12) έχει βέλτιστη λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$. Τότε ισχύει $z^1 = f(\mathbf{x}^1)$.*

Απόδειξη. Επειδή η λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$ ως βέλτιστη είναι εφικτή, ισχύει $z^1 \leq \mathbf{d}_i'\mathbf{x}^1 + e_i, i = 1, \ldots, k$, επομένως $z^1 \leq f(\mathbf{x}^1)$. Ας υποθέσουμε ότι $z^1 < f(\mathbf{x}^1)$. Τότε η λύση $(\mathbf{x}^1, f(\mathbf{x}^1))$ είναι επίσης εφικτή και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από z^1, επομένως η $(\mathbf{x}^1, z^1)$ δεν είναι βέλτιστη, άτοπο. Συνεπώς, $z_1 = f(\mathbf{x}_1)$. □

Πρόταση 1.1 *Αν ένα από τα προβλήματα* (1.11) *και* (1.12) *έχει βέλτιστη λύση τότε έχει και το άλλο και οι βέλτιστες λύσεις ταυτίζονται στο διάνυσμα* $\mathbf{x}$ *και στην αντικειμενική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω ότι το πρόβλημα (1.11) έχει βέλτιστη λύση $\mathbf{x}^0$ με βέλτιστη τιμή $z_{PW} = f(\mathbf{x}^0)$. Επειδή $f(\mathbf{x}^0) \leq \mathbf{d}_i'\mathbf{x}^0 + e_i, i = 1, \ldots, k$, η $(\mathbf{x}^0, z_{PW})$ είναι εφικτή λύση του προβλήματος (1.12), και επομένως $z_{LP} \geq z_{PW}$. Ας υποθέσουμε ότι $z_{LP} > z_{PW}$, δηλαδή υπάρχει βέλτιστη λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$ του προβλήματος (1.12) με $z_{LP} = z^1 > z_{PW}$. Από το Λήμμα 1.2 προκύπτει ότι $z^1 = f(\mathbf{x}^1)$. Επομένως η λύση $\mathbf{x}^1$ είναι εφικτή λύση για το πρόβλημα (1.11) και $f(\mathbf{x}^1) > z_{PW}$, που είναι άτοπο. Συνεπώς $z_{LP} = z_{PW}$ και η $(\mathbf{x}^0, z_{PW})$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (1.12).

Έστω τώρα ότι το πρόβλημα (1.12) έχει βέλτιστη λύση $(\mathbf{x}^1, z^1)$, με $z_{LP} = z^1$. Από το Λήμμα 1.2 προκύπτει ότι $z^1 = f(\mathbf{x}^1)$. Η $\mathbf{x}^1$ είναι εφικτή λύση στο πρόβλημα (1.11) επομένως $z_{PW} \geq f(\mathbf{x}^1) = z_{LP}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια άλλη εφικτή λύση $\mathbf{x}^0$ του προβλήματος (1.11) με $f(\mathbf{x}^0) > z_{LP}$. Τότε η λύση $(\mathbf{x}^0, f(\mathbf{x}^0))$ είναι εφικτή για το πρόβλημα (1.12), πράγμα άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι η βέλτιστη τιμή του (1.12) είναι ίση με z_{LP}. Συνεπώς $z_{LP} = z_{PW}$ και η $\mathbf{x}^1$ είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος (1.11). □

Εντελώς αντίστοιχη είναι η περίπτωση ελαχιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κυρτής συνάρτησης $g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως το μέγιστο ενός πεπερασμένου αριθμού αφφινικών συναρτήσεων

$$g(\mathbf{x}) = \max\{\mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, i = 1, \ldots, k\}. \tag{1.13}$$

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\begin{array}{rlrcl} z_{PW} = & \min & g(\mathbf{x}) & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array} \tag{1.14}$$

όπου η g είναι τμηματικά γραμμική κυρτή συνάρτηση, μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π. με $n+1$ μεταβλητές απόφασης $(z, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rlrcl} z_{LP} = & \min & z & & \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & & z & \geq & \mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, \quad i = 1, \ldots, k \\ & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.15}$$

Παρατηρήσεις. 1. Το πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας κοίλης τμηματικά γραμμικής συνάρτησης (1.11), όπως και το συμμετρικό του (1.11) έχουν ενδιαφέρουσα ερμηνεία ως προβλήματα βελτιστοποίησης του χειρότερου ενδεχομένου. Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους με μεταβλητές απόφασης που εκφράζονται από το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, για κάθε εφικτή απόφαση $\mathbf{x}$ υπάρχουν k διαφορετικά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν για καθένα από τα οποία το κέρδος είναι ίσο με $\mathbf{d}_i'\mathbf{x} + e_i, i = 1, \ldots, k$. Ο αποφασίζων δεν έχει τη δυνατότητα να προσδιορίσει ποιό από τα ενδεχόμενα θα υλοποιηθεί. Για το μοντέλο αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης (1.11) μπορεί να ερμηνευθεί ως μεγιστοποίηση του μικρότερου δυνατού κέρδους από κάθε απόφαση. Ο αποφασίζων δηλαδή ακολουθεί εντελώς συντηρητική πολιτική, υποθέτοντας ότι το χειρότερο δυνατό ενδεχόμενο θα συμβεί και προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος κάτω από αυτή την υπόθεση. Αντίστοιχα για το πρόβλημα (1.14), μπορούμε να θεωρήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση ως το χειρότερο δυνατό ενδεχόμενο κόστους που ο αποφασίζων προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει.

Λόγω της παραπάνω ερμηνείας τα προβλήματα (1.11) και (1.14) αναφέρονται στη βιβλιογραφία του γραμμικού προγραμματισμού ως προβλήματα maximin και minimax, αντίστοιχα.

2. Στη γενική περίπτωση η βελτιστοποίηση μιας τμηματικά γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης δεν ανάγεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \min\{x, 2-x\} = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$$

που είναι τμηματικά γραμμική και κοίλη. Το πρόβλημα $z_1 = \max\{f(x), 1/2 \leq x \leq 2\}$ έχει βέλτιστη λύση $x_1 = 2$ και $z_1 = 1$. Όπως έχουμε δει το ισοδύναμο π.γ.π. είναι $\max\{z : z \leq x, z \leq 2-x, 1/2 \leq x \leq 2\}$ που έχει την ίδια βέλτιστη λύση. Όμως το πρόβλημα $z_2 = \min\{f(x), 1/2 \leq x \leq 2\}$ το οποίο έχει βέλτιστη λύση $x_2 = 2, z_2 = 0$, δεν μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π.. Αν κατ'αναλογία θεωρήσουμε το π.γ.π. $\min\{z : z \leq x, z \leq 2-x, 1/2 \leq x \leq 2\}$, αυτό δεν είναι ισοδύναμο του αρχικού, καθώς είναι μή φραγμένο ενώ το αρχικό έχει βέλτιστη λύση.

1.5.1 Προβλήματα Προσέγγισης Στόχων

Τα προβλήματα αυτής της υποενότητας αποτελούν μια ειδική κατηγορία προβλημάτων minimax, δηλαδή ελαχιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κυρτής συνάρτησης. Έστω ότι σε ένα πρόβλημα απόφασης με μεταβλητές $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και εφικτή περιοχή για το $\mathbf{x}$ το σύνολο F, υπάρχουν k πρόσθετοι στόχοι που εκφράζονται ως γραμμικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα ζητείται να βρεθεί ένα διάνυσμα απόφασης $\mathbf{x} \in F$ τέτοιο ώστε

$$\alpha_i'\mathbf{x} = \beta_i, i = i, \ldots, k,$$

όπου $\alpha_i \in \mathbb{R}^n, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$.

Οι παραπάνω εξισώσεις αντιστοιχούν σε γραμμικούς περιορισμούς και θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στους περιορισμούς που ορίζουν την εφικτή περιοχή F. Ο λόγος που εξετάζονται χωριστά είναι ότι τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας είναι συνήθως ανέφικτα, δηλαδή δεν υπάρχει λύση $\mathbf{x} \in F$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα και όλες τις εξισώσεις των στόχων. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνολο F αποτελείται από τους *ανελαστικούς* περιορισμούς, δηλαδή αυτούς που πρέπει οπωσδήποτε να ικανοποιηθούν, ενώ οι στόχοι αντιπροσωπεύουν τους *ελαστικούς* περιορισμούς, που επιτρέπεται να παραβιαστούν με κάποια ποινή που προσδιορίζεται ως εξής. Αν για την εξίσωση στόχου i το αριστερό μέρος $\alpha_i'\mathbf{x}$ υπερβαίνει την τιμή-στόχο β_i, τότε υπάρχει μια ποινή p_i ανά μονάδα υπέρβασης. Αντίστοιχα, αν το αριστερό μέρος υπολείπεται του β_i, η ποινή ανά μονάδα έλλειψης είναι q_i. Επομένως η συνολική ποινή για την απόκλιση του στόχου i είναι ίση με

$$\epsilon_i(\mathbf{x}) = p_i(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+ + q_i(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^-,$$

όπου για $w \in \mathbb{R}$ τα w^+, w^- συμβολίζουν το θετικό και αρνητικό μέρος του w, αντίστοιχα

$$w^+ = \max(w, 0), \quad w^- = -\min(w, 0) = \max(-w, 0).$$

Είναι εύκολο να επαληθευθούν οι ταυτότητες

$$w^+, w^- \geq 0, \; w^+w^- = 0, \; w^+ - w^- = w, \quad w^+ + w^- = |w|, \; \forall w \in \mathbb{R}.$$

Με βάση τα παραπάνω ένα λογικό ερώτημα για το παραπάνω πρόβλημα απόφασης είναι να βρεθεί το διάνυσμα $\mathbf{x}$ που ικανοποιεί τους ανελαστικούς περιορισμούς και ελαχιστοποιεί τη συνολική ποινή για τις αποκλίσεις των ελαστικών περιορισμών. Ορίζουμε επομένως το παρακάτω πρόβλημα *προσέγγισης στόχων (goal programming problem)*

$$\begin{array}{rll} z_{GP} = & \min & \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\mathbf{x}) \\ & \text{υ.π.} & \mathbf{x} \in F \end{array} \tag{1.16}$$

Στο εξής θα υποθέσουμε ότι οι ανελαστικοί περιορισμοί που προσδιορίζουν το σύνολο F είναι γραμμικοί, ενώ οι συντελεστές ποινής $p_i, q_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$. Σ' αυτή την περίπτωση το πρόβλημα (1.16) μπορεί να εκφραστεί ως π.γ.π.. Το ισοδύναμο π.γ.π. μπορεί να αναπτυχθεί είτε ως ειδική περίπτωση του προβλήματος minimax, ή με μια νέα ισοδύναμη μοντελοποίηση.

Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα προσέγγισης στόχων αποτελεί ειδική περίπτωση του προβλήματος minimax, αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ποινής $\epsilon_i(\mathbf{x})$ είναι τμηματικά γραμμική και κυρτή. Παρατηρούμε ότι τόσο η $(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+ = \max(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i, 0)$ όσο και η $(\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^- = \max(-\alpha_i'\mathbf{x} + \beta_i, 0)$ εκφράζονται ως το μέγιστο αφφινικών συναρτήσεων επομένως είναι τμηματικά γραμμικές και κυρτές. Επειδή $p_i, q_i \geq 0$, το ίδιο ισχύει για την $\epsilon_i(\mathbf{x})$, και επομένως και για την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (1.16).

Η αντικειμενική συνάρτηση $\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i(\mathbf{x})$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή (1.13), δηλαδή ως μέγιστο ενός πεπερασμένου αριθμού αφφινικών συναρτήσεων, και επομένως το πρόβλημα (1.16) να εκφραστεί ως π.γ.π. της μορφής (1.15). Όμως η έκφραση αυτή είναι αρκετά πολύπλοκη καθώς ο αριθμός των αφφινικών συναρτήσεων που εμπλέκονται στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίσος με 2^k. Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα εναλλακτικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα προσέγγισης στόχων που οδηγεί σε απλούστερα προβλήματα και έχει αυτοτελές ενδιαφέρον.

Αφού επιτρέπουμε στους ελαστικούς περιορισμούς στόχων να μην ικανοποιούνται ακριβώς, τους γράφουμε στη μορφή

$$\alpha_i'\mathbf{x} - u_i + v_i = \beta_i, i = i, \ldots, k \tag{1.17}$$

όπου οι νέες μεταβλητές $u_i, v_i \geq 0$. Οι u_i, v_i θυμίζουν τις περιθώριες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή ενός π.γ.π. σε κανονική μορφή, με τη διαφορά ότι εδώ εξυπηρετούν διαφορετικό σκοπό και υπάρχουν δύο περιθώριες μεταβλητές για κάθε περιορισμό. Για κάθε $\mathbf{x}$ η εξίσωση (1.17) έχει άπειρες λύσεις ως προς u_i, v_i, και συγκεκριμένα

$$u_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+ + \lambda_i,\ v_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^- + \lambda_i, \tag{1.18}$$

για οποιοδήποτε $\lambda_i \geq 0$.

Θεωρούμε τώρα το παρακάτω π.γ.π.

$$\begin{array}{rll} z_{GLP} = & \min & \sum_{i=1}^k (p_i u_i + q_i v_i) \\ & \text{υ.π.} & \alpha_i'\mathbf{x} - u_i + v_i = \beta_i, i = 1, \ldots, k \\ & & \mathbf{x} \in F \\ & & u_i, v_i \geq 0, i = 1, \ldots, k \end{array} \tag{1.19}$$

Με βάση τα παραπάνω, αν $F \neq \emptyset$, τότε το πρόβλημα (1.19) είναι πάντα εφικτό. Επίσης, επειδή η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη αρνητική, είναι και φραγμένο, επομένως έχει πάντα βέλτιστη λύση. Για να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα προσέγγισης στόχων (1.16), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, επειδή οι συντελεστές $p_i, q_i, i = 1, \ldots, k$ είναι μή αρνητικοί, από τις λύσεις της μορφής (1.18), η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται για $\lambda_i = 0$. Επομένως στη βέλτιστη λύση του προβλήματος (1.19) θα ισχύει $u_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^+$ και $v_i = (\alpha_i'\mathbf{x} - \beta_i)^-$, $i = 1, \ldots, k$.

1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 Θεωρούμε ένα πρόβλημα παραγωγής n προϊόντων σε μια περίοδο. Το κέρδος ανά μονάδα του προϊόντος j είναι ίσο με $c_j, j = 1, \ldots, n$. Για την παραγωγή χρησιμοποιούνται m διαφορετικά μηχανήματα και όλα τα προϊόντα πρέπει να περάσουν από όλα τα μηχανήματα. Συγκεκριμένα κάθε προϊόν j απαιτεί χρόνο a_{ij} σε κάθε μηχάνημα i ανά μονάδα παραγόμενης ποσότητας. Το μηχάνημα i είναι διαθέσιμο για b_i χρονικές μονάδες μέσα στην περίοδο προγραμματισμού. Να αναπτυχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του σχεδίου παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Άσκηση 1.2 Θεωρούμε ένα πρόβλημα παραγωγής n προϊόντων σε μια περίοδο. Το κέρδος ανά μονάδα του προϊόντος j είναι ίσο με $c_j, j = 1, \ldots, n$. Για την παραγωγή χρησιμοποιούνται m διαφορετικά μηχανήματα. Κάθε προϊόν πρέπει να παραχθεί σε ένα (οποιοδήποτε) από τα μηχανήματα. Συγκεκριμένα μια ποσότητα του προϊόντος j που παράγεται στο μηχάνημα i απαιτεί χρόνο επεξεργασίας ίσο με a_{ij} ανά μονάδα. Η παραγωγή μιας ποσότητας προϊόντος μπορεί να γίνει τμηματικά σε διαφορετικά μηχανήματα. Το μηχάνημα i είναι διαθέσιμο για b_i χρονικές μονάδες μέσα στην περίοδο προγραμματισμού. Να αναπτυχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του σχεδίου παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος.

Άσκηση 1.3 Το παρακάτω πρόβλημα διαχείρισης κεφαλαίου (capital budgeting problem) είναι αντιπροσωπευτικό μιας ευρύτερης κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης επενδύσεων που αποτελούν μέρος της χρηματοοικονομικής ανάλυσης. Υποθέτουμε ότι μια εταιρία έχει τη δυνατότητα να επενδύσει σε n διαθέσιμα επενδυτικά προγράμματα. Κάθε πρόγραμμα είναι μια αυτοτελής οντότητα που απαιτεί δέσμευση T χρονικών περιόδων. Η εταιρία μπορεί να επενδύσει σε οποιοδήποτε κλάσμα του κάθε προγράμματος επιθυμεί (π.χ. αν αναλάβει 30% του πρώτου προγράμματος, θα έχει υποχρέωση να καταβάλλει το 30% των απαιτούμενων χρηματοδοτήσεων για τις επόμενες T περιόδους και θα εισπράττει το 30% όλων των εισροών από αυτό το πρόγραμμα μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα). Κάθε πρόγραμμα j κατά τη διάρκεια της περιόδου i δημιουργεί μια χρηματορροή ίση με a_i^j (θετική αν η εταιρεία εισπράττει από το πρόγραμμα και αρνητική αν το χρηματοδοτεί), $i = 1, \ldots, T, j = 1, \ldots, n$. Στο τέλος του ορίζοντα T κάθε πρόγραμμα j αποφέρει μια τελική απόδοση ίση με c_j (αυτή θα μπορούσε να περιλαμβάνει και την παρούσα αξία ενδεχόμενων μελλοντικών εσόδων από τη λειτουργία του προγράμματος και μετά το τέλος του ορίζοντα επένδυσης).

Εκτός από την επένδυση στα διάφορα επενδυτικά προγράμματα, η εταιρία έχει τη δυνατότητα να δανείζεται από ή να αποταμιεύει στην τράπεζα οποιοδήποτε χρηματικό ποσό για μια περίοδο. Το επιτόκιο δανεισμού και καταθέσεων είναι ίσο με r ανά περίοδο. (Αυτό σημαίνει ότι αν ένα ποσό y αποταμιευθεί στην αρχή μιας περιόδου, τότε στην αρχή της επόμενης περιόδου η εταιρεία θα εισπράξει ποσό ίσο με $y(1 + r)$, και αντίστοιχα για δανεισμό). Τέλος για κάθε περίοδο $i = 1, \ldots, T$ η εταιρία προβλέπεται να έχει έσοδα s_i από εξωγενείς πηγές, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιήσει για τη χρηματοδότηση των επενδυτικών προγραμμάτων ή/και για αποταμίευση την ίδια περίοδο.

Να αναπτυχθεί ένα π.γ.π. για τη μεγιστοποίηση του τελικού κέρδους της εταιρίας (το τελικό κέρδος προέρχεται από την απόδοση των προγραμμάτων και από το ποσό που βρίσκεται αποταμιευμένο στην τράπεζα στο τέλος του ορίζοντα).

***Άσκηση* 1.4** Θεωρούμε ένα δίκτυο με σύνολο κόμβων N και σύνολο ακμών E. Το δίκτυο χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη μεταφορά K διαφορετικών προϊόντων. Το προϊόν k έχει βάρος d_k ανά μονάδα, $k = 1, \ldots, n$. Σε κάθε κόμβο i υπάρχει διαθέσιμη ποσότητα a_{ik} μονάδων και εξωτερικές απαιτήσεις για b_{ik} μονάδες από κάθε προϊόν k. Η συνολική δυναμικότητα κάθε ακμής $(i, j) \in E$ είναι v_{ij} μονάδες βάρους. Το κόστος ανά μονάδα προϊόντος k που μεταφέρεται κατά μήκος της ακμής (i, j) είναι ίσο με c_{ijk}. Να μοντελοποιηθεί ένα πρόβλημα διαμετακομιδής για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς, αντίστοιχο αυτού της ενότητας 1.3.1.

***Άσκηση* 1.5** Να δειχθεί ότι κάθε μη ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς μπορεί με κατάλληλο μετασχηματισμό να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς.

***Άσκηση* 1.6** Σε ένα πρόβλημα παραγωγής T περιόδων όπως περιγράφεται στην ενότητα 1.2.2 υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα επιθυμητό επίπεδο παραγωγής σε κάθε περίοδο ίσο με το μέσο όρο της ζήτησης κατά τη διάρκεια του ορίζοντα (αυτό σημαίνει πρακτικά ότι για λόγους οικονομίας η εταιρία θα ήθελε να εξομαλύνει τη διαδικασία παράγοντας την ίδια ποσότητα σε κάθε περίοδο). Αποκλίσεις από αυτή τη σταθερή ποσότητα παραγωγής συνεπάγονται επιπλέον κόστος. Να συζητηθεί πώς μπορεί αυτό το νέο στοιχείο να συμπεριληφθεί στο μοντέλο π.γ.π. που έχει ήδη αναπτυχθεί. Να οριστούν όσες επιπλέον παράμετροι είναι απαραίτητες.

***Άσκηση* 1.7** Θεωρούμε μια απλοποιημένη μορφή ενός από τα πιο χαρακτηριστικά προβλήματα παραγωγής σε περιβάλλον αβεβαιότητας, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *πρόβλημα του εφημεριδοπώλη (newsvendor problem).* Πρόκειται για πρόβλημα παραγωγής ενός προϊόντος και μιας περιόδου. Το μοναδιαίο κόστος παραγωγής είναι ίσο με c και η μοναδιαία τιμή πώλησης ίση με r. Η ζήτηση D είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί διακριτή κατανομή με πεπερασμένο πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας

$$p(k) = \mathrm{P}(D = k), \quad k = 0, \ldots, M.$$

Η ποσότητα παραγωγής x καθορίζεται πριν γίνει γνωστή η ζήτηση. Αν προκύψει $D < k$, τότε η ποσότητα που θα πωληθεί είναι ίση με D, ενώ η αδιάθετη ποσότητα δεν έχει αξία για την εταιρεία. Αν προκύψει $D > x$, τότε οι πωλήσεις είναι ίσες με x ενώ η ζήτηση που δεν ικανοποιείται δεν επιφέρει προφανώς έσοδα, αλλά ούτε επιπλέον ποινές.
(α) Να εκφραστεί το αναμενόμενο κέρδος ως συνάρτηση της ποσότητας παραγωγής x και να δειχθεί ότι είναι τμηματικά γραμμική κοίλη συνάρτηση του x.
(β) Να μοντελοποιηθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση της ποσότητας παραγωγής που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο καθαρό κέρδος.

Άσκηση 1.8 Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i| \\ \text{υ.π.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{array}$$

όπου υποθέτουμε $c_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$. Να εκφραστεί ως π.γ.π.

Άσκηση 1.9 Να περιγραφεί πώς αλλάζει η μοντελοποίηση ενός προβλήματος προσέγγισης στόχων όταν κάποιοι ελαστικοί περιορισμοί είναι της μορφής $\alpha_i' \mathbf{x} \leq \beta_i$ ή $\alpha_i' \mathbf{x} \geq \beta_i$.

Άσκηση 1.10 Για το πρόβλημα της ενότητας 1.5.1 να δειχθεί ότι, αν το σύστημα των ελαστικών και ανελαστικών περιορισμών έχει εφικτές λύσεις, τότε κάθε εφικτή λύση είναι βέλτιστη για το πρόβλημα (1.19).

Άσκηση 1.11 Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

που στη γενική περίπτωση μπορεί να μην έχει καμιά λύση. Να γραφεί ως π.γ.π. το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

1. της νόρμας $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_1$
2. της νόρμας $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις βασικές ιδιότητες πάνω στις οποίες βασίζεται η ανάλυση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Θα μελετήσουμε από γενική άποψη τις έννοιες της βασικής εφικτής λύσης, της βασικής διεύθυνσης και αλλαγής βάσης. Από αυτές προκύπτουν εύκολα οι συνθήκες βελτιστότητας που οδηγούν στην ανάπτυξη της μεθόδου Simplex

Σημειώνουμε ότι η έμφαση σε αυτές τις σημειώσεις δίνεται στις ιδιότητες εκείνες πού είναι χρήσιμες στην επόμενη ανάλυση των ιδιοτήτων της βέλτιστης λύσης και της δυϊκότητας. Για τις βασικές ιδιότητες της εφικτής περιοχής και την αντιστοιχία γεωμετρικών/αλγεβρικών εννοιών στο γραμμικό προγραμματισμό ο αναγνώστης παραπέμπεται σε εισαγωγικά βιβλία Γραμμικού Προγραμματισμού (π.χ [1]).

Στο μεγαλύτερο μέρος της ανάλυσης θα αναφερόμαστε σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή, όπως δίνεται από την (2.1)
Όπως γνωρίζουμε αυτό γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας δεδομένου ότι κάθε π.γ.π. μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο π.γ.π. σε κανονική μορφή.

$$z = \max \underline{c}'\underline{x} \qquad (2.1)$$
$$\text{υ.π.} \quad A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0,$$

όπου $\underline{c}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, A πίνακας $m \times n$ πλήρους βαθμού, δηλαδή $\operatorname{rank}(A) = m$, και $m \leq n$.

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό
$\underline{a}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$ για τις γραμμές και
$\underline{A}_j \in \mathbb{R}^m, j = 1, \ldots, n$ για τις στήλες του πίνακα A.

Με βάση αυτά ο πίνακας A γράφεται

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}_1' \\ \vdots \\ \underline{a}_m' \end{pmatrix} = \left(\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

και το σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ εκφράζεται ισοδύναμα ως

$$\underline{a}_i' \underline{x} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (2.2)$$

ή ως

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{A}_j x_j = \underline{b} \qquad (2.3)$$

Η (2.3) δείχνει ότι μια λύση του συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$ αντιστοιχεί στην έκφραση του διανύσματος $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμ[ού] των στηλών του πίνακα A

2.2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Πρώτα συνοψίζουμε τις βασικές (γνωστές) γεωμετρικές ιδιότητες της εφικτής περιοχής κ' της βέλτιστης λύσης στο π.γ.π.

Έστω $F = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0 \}$ η εφικτή περιοχή του π.γ.π. (2.1). Γνωρίζουμε ότι

1) Η F είναι κυρτό πολύεδρο (όχι αναγκαστικά φραγμένο)

2) Η F έχει πεπερασμένο αριθμό ακραίων σημείων (κορυφών)

3) Αν η F είναι φραγμένο σύνολο τότε το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

4) Αν το π.γ.π. (2.1) έχει βέλτιστη λύση, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή της F που αντιστοιχεί σε βέλτιστη λύση.

Παρακάτω παρουσιάζουμε κάποιες επιπρόσθετες ιδιότητες που εμβαθύνουν περισσότερο στη γεωμετρία του γραμμικού προγραμματισμού.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι από την υπόθεση $r(A) = m \leq n$ το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση αν $m = n$ και άπειρες λύσεις αν $m < n$. Συγκεκριμένα έστω

$$F^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b} \}. \tag{2.4}$$

Έστω επίσης $W^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\; A\underline{x} = 0 \}$ το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = 0$.

Γνωρίζουμε (βλ. [2], σελ 250) ότι W^0 είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $\dim(W^0) = n-m$, και μάλιστα ταυτίζεται με τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$:

$$W^0 = \ker f_A$$

Έστω $\underline{x}^0$ μια λύση του μη ομογενούς συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$

Τότε το σύνολο των λύσεων ταυτίζεται με το

$$F^0 = \underline{x}^0 + W^0 = \{ \underline{x}^0 + \underline{w}^0 : \underline{x} \in W^0 \} \qquad (2.5)$$

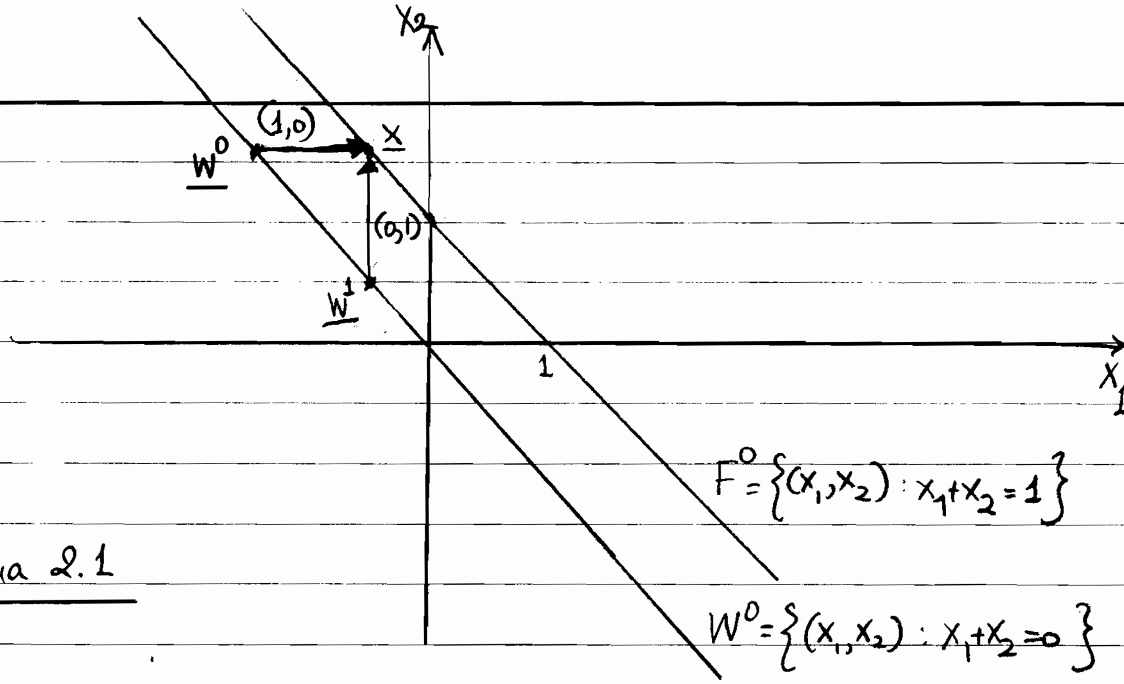
Γεωμετρικά το σύνολο W^0 αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-m$ που διέρχεται από τη αρχή των αξόνων. Το σύνολο F^0 είναι επίσης υπερεπίπεδο διάστασης $n-m$, παράλληλο προς το W^0, που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>Παράδειγμα 2.1</u> Για $n=2$ και $m=1$, έστω $A = (1\ 1)$, $b=1$ δηλ.

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $x_1 + x_2 = 0$.

Στο σχήμα 2.1 φαίνονται τα σύνολα W^0, F^0 :



Σχήμα 2.1

Εδώ το W^0 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 1, δηλαδή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(0,0)$

Το F^0 είναι επίσης ευθεία, παράλληλη με την προηγούμενη.

Επειδή μια λύση του συστήματος $x_1 + x_2 = 1$ είναι η $(1,0)$ κάθε σημείο $\underline{x}$ του F^0 μπορεί να γραφεί ως $\underline{x} = \underline{w}^0 + (1,0)$, για κάποιο $\underline{w}^0 \in W^0$, δηλαδή $F^0 = (1,0) + W^0$

Επίσης και το $(0,1)$ είναι λύση της $x_1 + x_2 = 1$, επομένως κάθε σημείο $\underline{x}$ του F μπορεί να γραφεί και ως

$$\underline{x} = \underline{w}^1 + (0,1) \text{ για κάποιο } \underline{w}^1 \in W^0, \text{ δηλαδή } F^0 = (0,1) + W^0.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι, ενώ το σύνολο F^0 είναι μοναδικό, η αναπαράσταση του με τη μορφή $\underline{x}^0 + W^0$ δεν είναι μοναδική, αφού ως $\underline{x}^0$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Πριν προχωρήσουμε, σημειώνουμε ότι για $\underline{b} \neq 0$ το σύνολο $F^0 = \underline{x}^0 + W^0$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, καθώς δεν περιέχει το σημείο $\underline{0}$. Είναι όμως υπερεπίπεδο διάστασης $n-m$, που προκύπτει από τον υπόχωρο W^0 με παράλληλη μετατόπιση. Εναλλακτικά ονομάζεται και συσχετισμένος υπόχωρος (affine subspace) του $\mathbb{R}^n$, κατ' αναλογία με τη συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax+b$ που δεν είναι γραμμική αλλά αφφινική, ή σύμπλοκο (coset).

Επιστρέφουμε τώρα στην εφικτή περιοχή F του προβλήματος (2.1). Με βάση την προηγούμενη συζήτηση η F είναι κυρτό πολύεδρο διάστασης $n-m$, που βρίσκεται πάνω στο υπερεπίπεδο F^0:

$$F = \{ \underline{x} \in F^0 : \underline{x} \geq 0 \},$$

αποτελεί δηλαδή την τομή του υπερεπιπέδου F^0 με το σύνολο $\mathbb{R}^n_+ = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} \geq 0 \}$, $\quad F = F^0 \cap \mathbb{R}^n_+$.

Επομένως οι έδρες του πολυέδρου F ορίζονται από εξισώσεις της μορφής $x_j = 0$ για κάποιο j ενώ οι ακμές και οι κορυφές, ως τομές εδρών, από εξισώσεις $x_j = 0$ για δύο ή περισσότερα j.

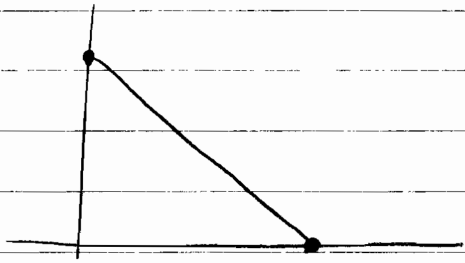
Παράδειγμα 2.1 (συνέχεια)

Για το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

τό σύνολο λύσεων είναι $F = \{ (x_1, x_2) \in F_0, \; x_1, x_2 \geq 0 \}$

που αντιστοιχεί γεωμετρικά στην τομή της ευθείας $x_1+x_2=1$ με το δεξιό τεταρτημόριο (βλ. Σχήμα 2.2)



Σχήμα 2.2

Τα ακραία σημεία του F είναι οι κορυφές $(1,0)$, $(0,1)$.

Παράδειγμα 2.2 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

, δηλ. $m=2$, $n=4$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$

Προφανώς $r(A)=m=2$. Επομένως το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$F^0=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^4 : A\underline{x}=\underline{b}\}$$ είναι

υπερεπίπεδο διάστασης $n-m=2$ στο χώρο $\mathbb{R}^4$, και

το σύνολο των μη αρνητικών λύσεων είναι το

$$F=F^0\cap\mathbb{R}^4_+ .$$

Επειδή το σύνολο F είναι $F\subseteq F_0$ όπου $\dim F=2$, μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως κυρτό πολύεδρο του διδιάστατου επιπέδου.
Η γραφική παράσταση δεν είναι μοναδική, επειδή εξαρτάται

από τη βάση του υπόχωρου $W_o = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$

που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τη γενική λύση του γραμμικού συστήματος.

Για παράδειγμα, αν στο αρχικό σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$ εκφράσουμε τις x_3, x_4 ως συναρτήσεις των x_1, x_2, δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + x_4 = 15 - x_1 - 2x_2 \\ x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 10 - 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 5 + x_1 - x_2 \end{array}$$

, παίρνουμε

ως γενική λύση την $\underline{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 10 - 2t_1 - t_2 \\ 5 + t_1 - t_2 \end{pmatrix}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

δηλαδή $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Επομένως $F^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + W^0$,

όπου W^0 ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τη βάση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Με βάση αυτή την αναπαράσταση το σύνολο λύσεων F^0 αντιστοιχεί γραφικά στο επίπεδο (t_1, t_2), και το

σύνολο λύσεων $F = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 : A\underline{x} = \underline{b}, \ \underline{x} \geq 0\} = F^0 \cap \mathbb{R}^4$

προσδιορίζεται από τους παρακάτω περιορισμούς ως πρός (t_1, t_2):

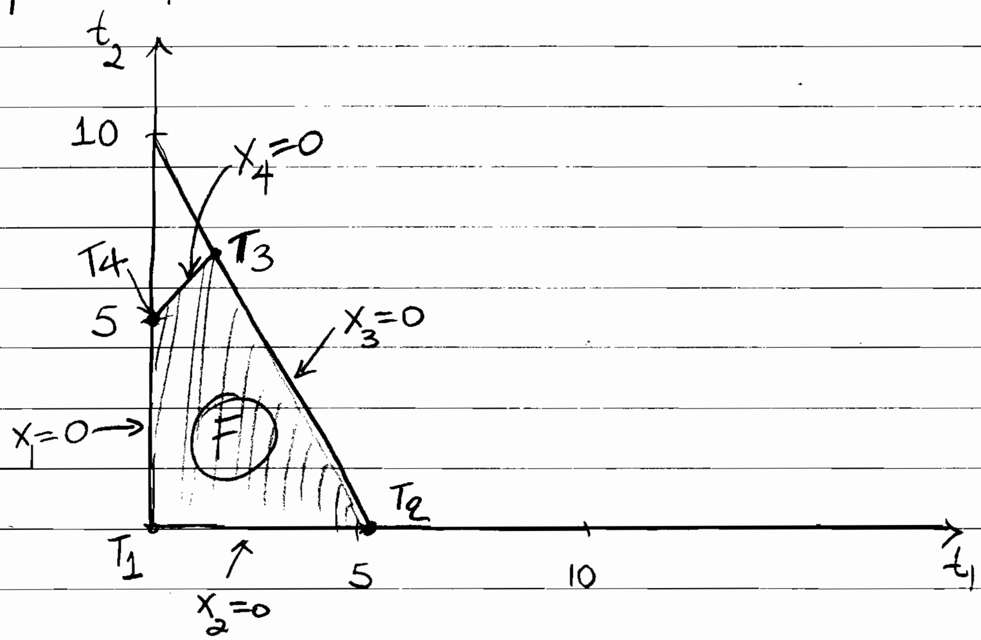
$x_1 \geq 0 \Rightarrow t_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow 10 - 2t_1 - t_2 \geq 0 \Rightarrow 2t_1 + t_2 \leq 10$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow 5 + t_1 - t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 - t_1 \leq 5$

Γραφικά αυτό αντιστοιχεί στο πολύεδρο που φαίνεται στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3

Το πολύεδρο F έχει 4 κορυφές για τις οποίες έχουμε

$T_1: t_1 = t_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, δηλαδή $x_1 = 0, x_2 = 0,$

$T_2: t_1 = 5, t_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, δηλαδή $x_2 = x_3 = 0$

$$T_3: \left.\begin{array}{l} 2t_1 + t_2 = 10 \\ -t_1 + t_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{3}, \; t_2 = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{δηλαδή} \quad x_3 = x_4 = 0$$

$$T_4: t_1 = 0, \; t_2 = 5 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{δηλαδή} \quad x_1 = x_4 = 0.$$

Όπως περιμέναμε, οι πλευρές του πολυέδρου F αντιστοιχούν στις εξισώσεις $x_j = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$ και οι κορυφές σε τομές των πλευρών.

Η αναπαράσταση του Σχήματος 2.3 βασίστηκε στη χρήση της βάσης $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ του υπόχωρου W^0, δηλαδή στην απαλοιφή των x_3, x_4 από τις αρχικές εξισώσεις.

Όμως η αναπαράσταση αυτή δεν είναι μοναδική. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να απαλείψουμε τις x_1, x_2 οπότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 15 - x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 10 - x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{20}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \end{array}$$

Επομένως:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{3} v_2 \\ \frac{20}{3} - \frac{1}{3} v_1 - \frac{2}{3} v_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

για $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

Επομένως, με αυτή την αναπαράσταση,

$$F^0 = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : A\underline{x} = \underline{b} \} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + W^0,$$

όπου ως βάση του W^0 παίρνουμε την $\left\{ \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Τώρα η εφικτή περιοχή $F = F^0 \cap \mathbb{R}^4_+$ παριστάνεται γραφικά ως ένα κυρτό πολύεδρο στο επίπεδο (v_1, v_2) που ορίζεται από τους περιορισμούς

$x_1 \geq 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \leq 5$

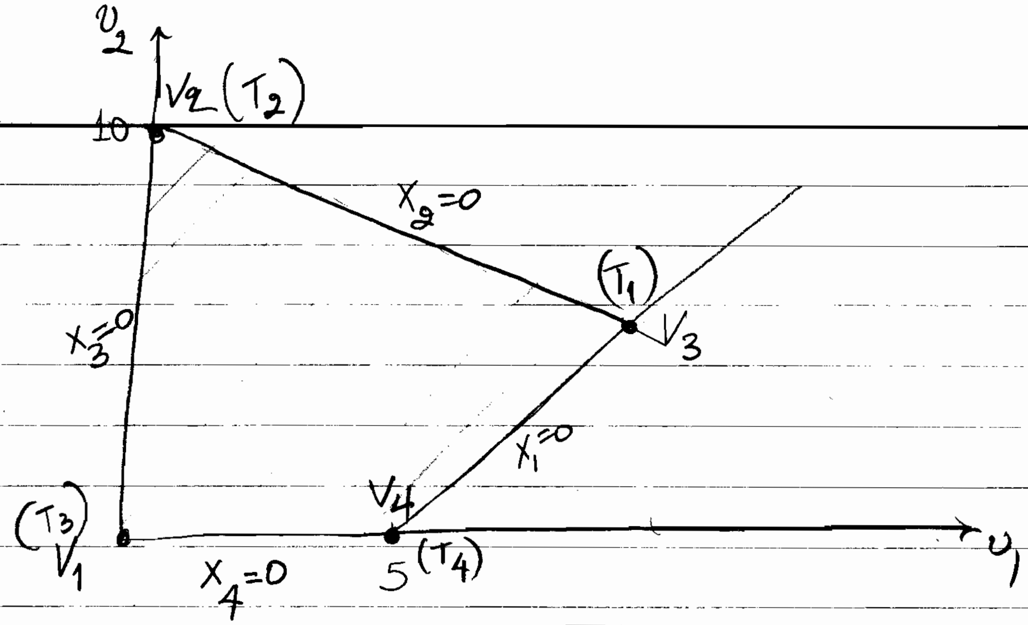
$x_2 \geq 0 \Rightarrow v_1 + 2v_2 \leq 20$

$x_3 \geq 0 \Rightarrow v_1 \geq 0$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow v_2 \geq 0$

Αυτή η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 2.4,

που έχει επίσης 4 κορυφές. Αυτές αντιστοιχούν σε



Σχήμα 2.4

$V_1 : v_1 = v_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 20/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_3 = x_4 = 0) \quad (T_3)$

$V_2 : v_1 = 0,\ v_2 = 10 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (x_2 = x_3 = 0) \quad (T_2)$

$V_3 : v_1 = 10,\ v_2 = 5 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (x_1 = x_2 = 0) \quad (T_1)$

$V_4 : v_1 = 5,\ v_2 = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 = x_4 = 0) \quad (T_4)$

Παρατηρούμε ότι ενώ η γραφική παράσταση του F είναι διαφορετική στα σχήματα 2.3 κ' 2.4, παρ' όλα αυτά οι κορυφές αντιστοιχούν στις ίδιες λύσεις $\underline{x} \in R^4$ και υπάρχει αντιστοιχία 1-1 μεταξύ των κορυφών των δύο πολυέδρων.
Με το ίδιο σκεπτικό μπορεί κανείς να κατασκευάσει και άλλες ισοδύναμες γραφικές παραστάσεις του συνόλου F. Για όλες αυτές το αντίστοιχο πολύεδρο θα έχει 4 κορυφές που αντιστοιχούν στις 4 λύσεις πού έχουμε βρεί.

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η γεωμετρική αναπαράσταση των λύσεων $F=\{\underline{x} : A\underline{x}=b, \underline{x}\geq 0\}$ δεν είναι μοναδική αλλά εξαρτάται από την επιλογή της βάσης του υπόχωρου W^0. Όμως για όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις το αντίστοιχο κυρτό πολύεδρο έχει πλευρές που προσδιορίζονται από περιορισμούς της μορφής $x_j=0$, και οι κορυφές του σε τομές δύο ή περισσότερων περιορισμών.
Επίσης υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις κορυφές των πολυέδρων που προκύπτουν από δύο διαφορετικές επιλογές βάσης.

Με βάση τα παραπάνω είναι δυνατή η γραφική αναπαράσταση και επίλυση ενός π.γ.π. αν σε κανονική μορφή ισχύει $n-m=2$. Σε αυτή την περίπτωση το πολύεδρο F είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

2.2.1. Ένα εναλλακτική Γεωμετρική Αναπαράσταση

Σ' αυτή την υποενότητα θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική γεωμετρική αναπαράσταση ενός π.γ.π. που θα φανεί χρήσιμη στις επόμενες ενότητες για την κατανόηση της έννοιας των βασικών λύσεων.

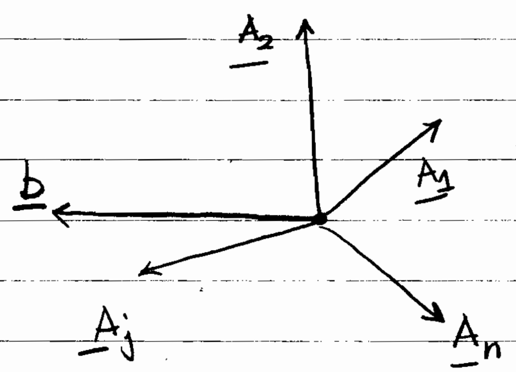
Στην προηγούμενη αναπαράσταση τα διανύσματα $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ θεωρούνται ως σημεία του n-διάστατου Ευκλείδιου χώρου.

Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε τις στήλες του πίνακα A όπως και το διάνυσμα $\underline{b}$ ως στοιχεία του m-διάστατου Ευκλείδιου χώρου. Με αυτή την ερμηνεία το σύστημα

$$A\underline{x}=\underline{b} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{A}_j = \underline{b}$$

αντιστοιχεί στην έκφραση του διανύσματος $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμού των στηλών του πίνακα A.

Στην ειδική περίπτωση όπου $m=2$, αυτή η ερμηνεία επιδέχεται και γραφική αναπαράσταση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5

2.3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις έννοιες της βασικής εφικτής λύσης και της αλλαγής βάσης, και το πώς αυτές οδηγούν στην ανάπτυξη της μεθόδου Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.

Θεωρούμε ένα π.γ.π. σε κανονική μορφή όπως δίνεται στην (2.1), και την εφικτή περιοχή του $F = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = b,\ \underline{x} \geq 0 \}$.

Για ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$I^+(\underline{x}) = \{ j : x_j > 0 \}$$
$$I^-(\underline{x}) = \{ j : x_j < 0 \}$$
$$I^0(\underline{x}) = \{ j : x_j = 0 \}$$

δηλαδή τα σύνολα των δεικτών που αντιστοιχούν σε θετικές, αρνητικές και μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$, αντίστοιχα. Προφανώς τα σύνολα $I^+(\underline{x})$, $I^-(\underline{x})$, $I^0(\underline{x})$ αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Επίσης για ένα σύνολο $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε

$$A_I = (A_j,\ j \in I)$$

τον υποπίνακα του A διαστάσεων $m \times |I|$, που αποτελείται από τις στήλες του A που αντιστοιχούν στους δείκτες από το σύνολο I. Για τους σκοπούς της ανάλυσης αρκεί να υποθέσουμε ότι η σειρά με την οποία σχηματίζονται οι στήλες του A_I δεν έχει σημασία, δηλαδή όλοι οι υποπίνακες του A που αποτελούνται από τις ίδιες στήλες σε διαφορετική διάταξη αντιστοιχούν στον ίδιο υποπίνακα.

Ορισμός 2.1 Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **Βασική Λύση** (Β
αν ικανοποιεί

(i) $A\underline{x} = b$

(ii) Οι στήλες του A που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$, δηλαδή στο σύνολο $I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Ορισμός 2.2 Ένα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **Βασική Εφικτή Λύση** (ΒΕΛ) αν είναι Βασική Λύση και επιπλέον $\underline{x} \geq 0$.

Επειδή $r(A) = m < n$, ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A μπορεί να είναι το πολύ m, επομένως οι μη μηδενικές συνιστώσες μιας ΒΛ μπορεί επίσης να είναι το πολύ m το πλήθος.
Από την άλλη πλευρά ας θεωρήσουμε μια ΒΛ $\underline{x}$, με $|I^+(\underline{x}) \cup I^-(\underline{x})| = k < m$, και ας υποθέσουμε ότι οι μη μηδενικές συνιστώσες αντιστοιχούν στους δείκτες $B(1), \ldots, B(k)$:

$$x_{B(1)}, x_{B(2)}, \ldots, x_{B(k)} \neq 0, \quad x_j = 0 \text{ για } j \neq B(1), \ldots, B(k)$$

Τότε από τον ορισμό 2.1 έχουμε ότι οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Επειδή $r(A) = m$, υπάρχουν επιπλέον $m-k$ στήλες του A, έστω $B(k+1), \ldots, B(m)$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (για την απόδειξη βλ. Άσκηση 2.1)

Επομένως για μια βασική λύση ισχύει η παρακάτω πρόταση (που αποτελεί και ισοδύναμο ορισμό)

Πρόταση 2.1 Ένα διάνυσμα $\underline{x}$ είναι βασική λύση αν και μόνο αν $A\underline{x} = b$ και υπάρχουν δείκτες $B(1), \cdots, B(m)$ τέτοιοι ώστε

(i) Οι στήλες $\underline{A}_{B(1)}, \ldots, \underline{A}_{B(m)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

(ii) $I^{+}(\underline{x}) \cup I^{-}(\underline{x}) \subseteq \{B(1), \cdots, B(m)\}$

Ορισμός 2.3 Ένας υποπίνακας $m \times m$

$$B = \left(\underline{A}_{B(1)} \cdots A_{B(m)}\right)$$

του πίνακα A που αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες ονομάζεται <u>βασικός πίνακας</u> ή <u>βάση</u> (basis).

Οι μεταβλητές $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ είναι οι <u>βασικές</u> μεταβλητές της βάσης B και οι υπόλοιπες οι <u>μη βασικές</u>.

Ορισμός 2.4 Μια βασική λύση $\underline{x}$ είναι <u>μη εκφυλισμένη</u> (nondegenerate) αν $|I^{+}(\underline{x}) \cup I^{-}(\underline{x})| = m$, δηλαδή έχει ακριβώς m μη μηδενικές συνιστώσες, ενώ είναι <u>εκφυλισμένη</u> (degenerate) αν $|I^{+}(\underline{x}) \cup I^{-}(\underline{x})| < m$.

Έστω $\underline{x}$ μια μη εκφυλισμένη βασική λύση, και B η βάση που αντιστοιχεί στις m θετικές συνιστώσες της $\underline{x}$. (Η βάση αυτή προσδιορίζεται μονοσήμαντα, αφού η $\underline{x}$ έχει ακριβώς m μη μηδενικές συνιστώσες).
Τότε ορίζουμε $\underline{x}_B \in \mathbb{R}^m$ ως το διάνυσμα που αποτελείται από τις μη μηδενικές συνιστώσες που έχουν τεθεί με την ίδια σειρά όπως και οι αντίστοιχες στήλες του A στη βάση B, δηλαδή αν οι δείκτες των στηλών είναι $B(1), \ldots, B(m)$, τότε το $\underline{x}_B$ αποτελείται από τις βασικές μεταβλητές

$$B = \left(\underline{A}_{B(1)} \cdots \underline{A}_{B(m)}\right) \quad \text{και} \quad \underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}.$$

Με αυτό το συμβολισμό η εξίσωση $A\underline{x}=\underline{b}$ που ικανοποιείται από τη $\underline{x}$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \underline{A}_j = \underline{b} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} + \sum_{j\notin B} x_j \underline{A}_j = \underline{b}$$

Επειδή $x_j=0$ για $j \neq B(1),\dots,B(m)$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} = \underline{b} \Rightarrow B\underline{x}_B = \underline{b}$$

Επειδή ο B αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, είναι αντιστρέψιμος, επομένως $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$

Προκύπτει επομένως ότι οι συγκεκριμένες τιμές των $x_{B(1)},\dots,x_{B(m)}$ καθορίζονται μονοσήμαντα από το σύνολο των δεικτών $B(1),\dots,B(m)$ ή ισοδύναμα τον βασικό πίνακα B.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια εκφυλισμένη βασική λύση $\underline{x}$, με μη μηδενικές συνιστώσες τις $B(1),\dots,B(k)$, $k<m$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1, υπάρχουν επίσης $m-k$ στήλες του A ώστε ο πίνακας $B=(\underline{A}_{B(1)},\dots,\underline{A}_{B(m)})$ να είναι βασικός. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζουμε πάλι

$$\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$ ως το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών.

Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο όπως και παραπάνω προκύπτει

$$\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b}$$

Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι ένας βασικός πίνακας B προσδιορίζει μονοσήμαντα μια βασική λύση $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

για την οποία ισχύει $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{0}_{n-m} \end{pmatrix}$, όπου $\underline{x}_B = B^{-1}b \in \mathbb{R}^m$.

Η λύση αυτή είναι μη εκφυλισμένη αν $x_{B(i)} \neq 0$, $i=1,\dots,m$ και εκφυλισμένη αν $x_{B(i)} = 0$ για κάποιο i.
Δηλαδή η επιλογή των m στηλών του βασικού πίνακα B προσδιορίζει μονοσήμαντα ποιές συνιστώσες της αντίστοιχης βασικής λύσης είναι μη μηδενικές, όπως επίσης και τις τιμές τους.

Από την άλλη πλευρά, αν $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι βασική λύση, τότε αυτή προσδιορίζει μονοσήμαντα το βασικό πίνακα μόνο αν είναι μη εκφυλισμένη. Αν είναι εκφυλισμένη, τότε οποιαδήποτε συλλογή m γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A που περιλαμβάνει τις k στήλες που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές συνιστώσες του $\underline{x}$ αποτελεί βάση.
Κάθε μιά από αυτές τις βάσεις δίνει την ίδια εκφυλισμένη λύση $\underline{x}$.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να δούμε τη γεωμετρική ερμηνεία των βασικών λύσεων.
Υπενθυμίζουμε ότι η εφικτή περιοχή $F = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = b, \underline{x} \geq 0\}$

αντιστοιχεί γεωμετρικά σε ένα κυρτό πολύεδρο διάστασης $n-m$, πού βρίσκεται στο υπερεπίπεδο $F^0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}\}$

και ορίζεται από τους περιορισμούς $x_j \geq 0$, $j=1,\dots,n$.

Μέ βάση αυτή την αναπαράσταση η γεωμετρική ερμηνεία των βασικών εφικτών λύσεων δίνεται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1 : Ενα διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι Βασική Εφικτή Λύση του Π.Γ.Π. (2.1) αν και μόνο αν το $\underline{x}$ είναι κορυφή του πολυέδρου της εφικτής περιοχής F.

(Για την απόδειξη, όπως επίσης και τον ορισμό της κορυφής βλ. π.χ. [1])

Εκτός από αυτή τη γεωμετρική ερμηνεία, είναι χρήσιμο να δούμε την αντιστοιχία που προκύπτει από την εναλλακτική αναπαράσταση της ενότητας 2.2.1.

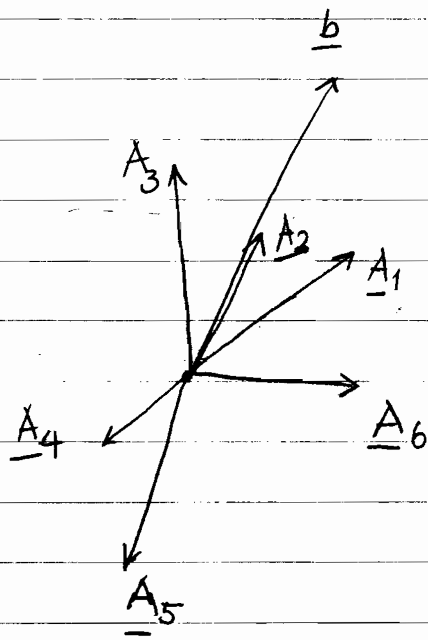
Κατ' αρχήν αφού $r(A)=m$, ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A είναι όλος ο $\mathbb{R}^m$, και οποιοσδήποτε βασικός πίνακας B αντιστοιχεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^m$.

Επίσης η λύση του συστήματος $A\underline{x}=\underline{b} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{A_j} = \underline{b}$ αντιστοιχεί στην έκφραση του διανύσματος $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμού των στηλών του A. Επειδή $r(A)=m$ αυτό είναι δυνατό για κάθε $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, επομένως το σύστημα $A\underline{x}=\underline{b}$ έχει πάντα λύση.

Μια βασική λύση $\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x_B} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ και ένας βασικός πίνακας B αντιστοιχούν επομένως στην έκφραση του $\underline{b}$ ως γραμμικού συνδυασμού των βασικών στηλών μόνο.

Αυτό είναι επίσης πάντα δυνατό για κάθε βασικό πίνακα B και κάθε $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, δεδομένου ότι ο B αντιστοιχεί σε βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα 2.3. Έστω $m=2$, $n=6$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6. Ένας βασικός πίνακας ορίζεται από δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα-στήλες του A.



Σχήμα 2.6

Από το σχήμα φαίνεται ότι ο πίνακας $B^{(1)} = (\underline{A}_1\ \underline{A}_3)$ είναι βασικός επειδή τα διανύσματα $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αντίθετα ο πίνακας $B^{(2)} = (\underline{A}_1\ \underline{A}_3)$ δεν είναι βασικός, καθώς τα $\underline{A}_1, \underline{A}_3$ είναι συγγραμμικά

Ας θεωρήσουμε τώρα τον βασικό πίνακα $B^{(1)} = (\underline{A}_1, \underline{A}_3)$

Επειδή το διάνυσμα $\underline{b}$ δεν είναι συγγραμμικό με κανένα από τα $\underline{A}_1, \underline{A}_3$ η έκφραση $\underline{b} = x_1 \underline{A}_1 + x_3 \underline{A}_3$ αντιστοιχεί σε $x_1 \neq 0$ και $x_3 \neq 0$, επομένως το βασικό διάνυσμα είναι το $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ και η βασική λύση $\underline{x}^{(1)} = (x_1\ 0\ x_3\ 0\ 0\ 0)'$ είναι μη εκφυλισμένη.

Αντίθετα για τον βασικό πίνακα $B^{(3)} = (A_1, A_2)$, επειδή το $\underline{b}$ είναι συγγραμμικό με το $\underline{A}_2$, η έκφραση $\underline{b} = x_1 \underline{A}_1 + x_2 \underline{A}_2$ αντιστοιχεί σε $x_1 = 0$ και $x_2 \neq 0$.
Για να συμπληρωθεί ο βασικός πίνακας αρκεί να πάρουμε οποιαδήποτε από τις άλλες στήλ
Επομένως το βασικό διάνυσμα είναι $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ και η βασική λύση $x^{(3)} = (0\ x_2\ 0\ 0\ 0\ 0)'$ είναι εκφυλισμένη.

Όσον αφορά την εφικτότητα, τόσο η $\underline{x}^{(1)}$ όσο και η $\underline{x}^{(3)}$ είναι βασικές εφικτές λύσεις. Αντίθετα για το βασικό πίνακα $B^{(4)} = (\underline{A}_1, \underline{A}_6)$, η έκφραση $\underline{b} = x_1 \underline{A}_1 + x_6 \underline{A}_6$ αντιστοιχεί σε βασικό διάνυσμα $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_6 \end{pmatrix}$ με $x_1 > 0$, $x_6 < 0$ επομένως η λύση $\underline{x}^{(4)} = (x_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ x_6)'$ είναι βασική αλλά όχι εφικτή.

2.4. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ - ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε συνοπτικά τη διαδικασία μετάβασης από μια βασική εφικτή λύση σε μια γειτονική, που αποτελεί το δομικό στοιχείο για την μέθοδο Simplex επίλυσης ενός π.γ.π. σε κανονική μορφή.

Στη συζήτηση που ακολουθεί θα υποθέσουμε ότι κάθε βασική εφικτή λύση είναι μη εκφυλισμένη. Επομένως κάθε ΒΕΛ έχει m θετικές και n-m μηδενικές συντεταγμένες.
Στη γεωμετρική αναπαράσταση μια μη εκφυλισμένη ΒΕΛ προκύπτει από την τομή n-m υπερεπιπέδων της μορφής $x_j=0$ και αντιστοιχεί σε μια κορυφή της εφικτής περιοχής.

Η συζήτηση δεν έχει σκοπό την πλήρη ανάπτυξη και θεωρητική θεμελίωση της μεθόδου Simplex, που θεωρείται γνωστή (βλ. [1]). Σκοπός είναι η παρουσίαση σε γενική μορφή κάποιων βασικών ιδιοτήτων και εννοιών πού αφενός σχετίζονται άμεσα με τη διαδικασία επίλυσης και αφ' ετέρου είναι χρήσιμες για την κατανόηση της θεωρίας δυϊκότητας στο επόμενο κεφάλαιο.

Υπενθυμίζουμε κατ' αρχή το βασικό θεώρημα για τη βέλτιστη λύση ενός π.γ.π.

<u>Θεώρημα 2.2</u> Αν υπάρχει βέλτιστη λύση του π.γ.π. (2.1), τότε υπάρχει τουλάχιστον μια βασική εφικτή λύση που είναι βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Η σημασία του Θεωρήματος 2.2 βρίσκεται στο ότι επιτρέπει, για την εύρεση μιας βέλτιστης λύσης, τον περιορισμό στο σύνολο των βασικών εφικτών λύσεων, που είναι πεπερασμένο, δηλαδή

$$\max\{c'x : x \in F\} = \max\{c'x : x \text{ ΒΕΛ του συνόλου } F\}$$

Από την άλλη πλευρά, ο αριθμός των ΒΕΛ, παρ' ότι είναι πεπερασμένος, συνήθως αυξάνεται εκθετικά με την τάξη του προβλήματος, δηλ. τις παραμέτρους m, n.

Πραγματικά, έστω $K(F) = \{\underline{x} : A\underline{x} = b,\ \underline{x} \geq 0,\ x \text{ ΒΕΛ}\}$ το σύνολο των ΒΕΛ, δηλαδή των κορυφών της εφικτής περιοχής F, και $N_K(F) = |K(F)|$ το πλήθος των ΒΕΛ.
Επειδή κάθε ΒΕΛ αντιστοιχεί σε ένα βασικό πίνακα (κάτω από την υπόθεση μη εκφυλισμένων ΒΕΛ), αλλά κάθε βασικός πίνακας αντιστοιχεί σε μια ΒΛ που μπορεί να μην είναι εφικτή, προκύπτει ότι το $N_K(F)$ είναι μικρότερο ή ίσο από τον αριθμό των βασικών πινάκων που σχηματίζονται από τις στήλες του A. Επίσης κάθε βασικός πίνακας αποτελείται από m στήλες του A, που επιπλέον πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως ο αριθμός των βασικών πινάκων είναι άνω φραγμένος από τον αριθμό των συνδυασμών m στηλών από τις n στήλες του A. Συνεπώς ισχύει ότι

$$N_K(F) \leq \binom{n}{m} \qquad (2.6)$$

Ενώ η σχέση αυτή δίνει άνω φράγμα για τον αριθμό των ΒΕΛ, στην πραγματικότητα δείχνει και την πολυπλοκότητα του προβλήματος, αν κάποιος ακολουθούσε ένα στοιχειώδη αλγόριθμο που θα σχημάτιζε όλους τους βασικούς πίνακες, θα εξέταζε αν η αντίστοιχη ΒΛ είναι εφικτή κ' θα υπολόγιζε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για να καταλήξει σε εκείνη τη λύση που δίνει τη μέγιστη τιμή. Είναι προφανές ότι ένας τέτοιος αλγόριθμος απλής απαρίθμησης δε είναι βιώσιμος ως μέθοδος λύσης για προβλήματα έστω και μέτριου μεγέθους ($n \approx 10$, $m \approx 5$).

Βλέπουμε επομένως ότι για να εκμεταλλευθεί κανείς το Θεώρημα 2.2 χρειάζεται ένας πιο συστηματικός τρόπος εξέτασης των ΒΕΛ ενός π.γ.π, που δεν απαιτεί την απαρίθμηση όλων των ΒΕΛ. Η μέθοδος Simplex είναι ένας τέτοιος αλγόριθμος που από τη μια μεριά περιορίζεται στο σύνολο K(F) για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, αλλά από την άλλη διαθέτει δύο σημαντικά εργαλεία για να αποφύγει την εξέταση όλων των ΒΕΛ. Αυτά είναι:

(α) Ένα <u>κριτήριο βελτιστότητας</u>, δηλαδή ένας τρόπος ελέγχου για το αν μια συγκεκριμένη ΒΕΛ είναι βέλτιστη, χρησιμοποιώντας πληροφορία μόνο από την παρούσα λύση, και

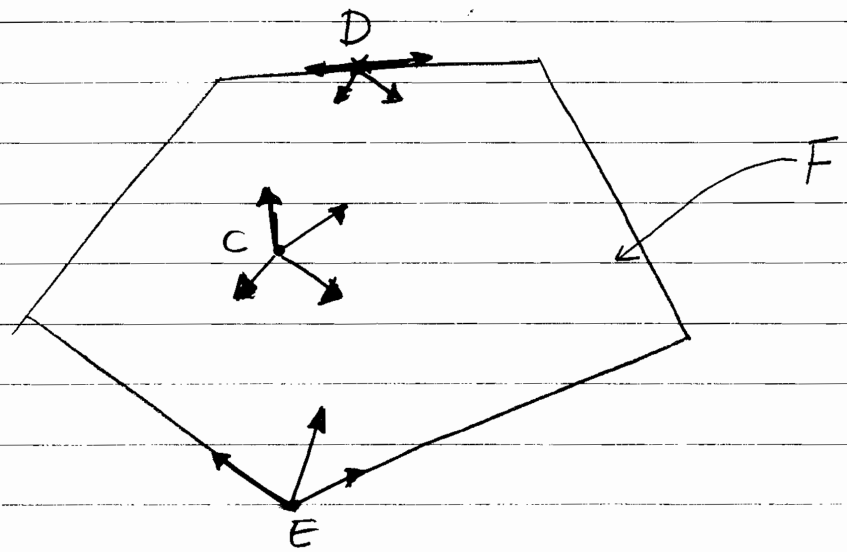
(β) Μια <u>μέθοδος βελτίωσης</u>, δηλαδή ένας τρόπος μετάβασης από μια μη βέλτιστη ΒΕΛ σε μια άλλη ΒΕΛ που έχει μεγαλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Είναι προφανές ότι, επειδή ο αριθμός των ΒΕΛ είναι πεπερασμένος, αν το π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση, ένας αλγόριθμος αυτού του τύπου θα τη βρεί σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις βασικές έννοιες και ιδιότητες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των δύο παραπάνω εργαλείων. Η πρώτη βασική έννοια είναι αυτή της εφικτής διεύθυνσης.

Ορισμός 2.5 Έστω $\underline{x} \in F$ μια εφικτή λύση του π.γ.π. (2.1). Ένα διάνυσμα $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται εφικτή κατεύθυνση στο σημείο $\underline{x}$, αν $\exists\ \theta > 0$ τέτοιος ώστε $\underline{x} + \theta \underline{d} \in F$.

Διαισθητικά μια εφικτή κατεύθυνση προσδιορίζει μια κατεύθυνση κίνησης από μια εφικτή λύση σε μια διαφορετική επίσης εφικτή λύση. Στο Σχήμα 2.7 τα βέλη δείχνουν παραδείγματα εφικτών κατευθύνσεων σε διάφορα σημεία της εφικτής περιοχής.



Σχήμα 2.7

Η έννοια της εφικτής κατεύθυνσης είναι χρήσιμη τόσο για την ανάπτυξη του κριτηρίου βελτιστότητας, όσο και για τη μέθοδο βελτίωσης.
Σε ένα π.γ.π σε κανονική μορφή μια εφικτή λύση $\underline{x}$ ικανοποιεί $A\underline{x} = b$ και $\underline{x} \geq 0$.
Επομένως μια κατεύθυνση $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ είναι εφικτή μόνο αν για κάποιο $\theta > 0$ η νέα λύση $\underline{x} + \theta \underline{d}$ ικανοποιεί επίσης $A(\underline{x} + \theta \underline{d}) = b$. Επειδή $A\underline{x} = \underline{b}$, προκύπτει η εξής αναγκαία συνθήκη για να είναι η $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση:

$$A\underline{d} = 0 \tag{2.7}$$

Επομένως κάθε εφικτή κατεύθυνση είναι διάνυσμα του γραμμικού υπόχωρου W^0 των λύσεων του ομογενούς συστήματος (βλ. (2.5)) και αυτό εξασφαλίζει ότι αν η αρχική λύση $\underline{x}$ ανήκει στο υπερεπίπεδο $F^0 = \{\underline{x} : A\underline{x} = b\}$ τότε και η νέα λύση $\underline{x} + \theta \underline{d}$ επίσης ανήκει στο F^0.

Για να είναι βέβαια το $\underline{d}$ εφικτή διεύθυνση θα πρέπει, εκτός της (2.7), να ισχύει ότι η νέα λύση $\underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$, δηλαδή βρίσκεται μέσα στο κυρτό πολύεδρο F της εφικτής περιοχής.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.7, στο σημείο C όλα τα διανύσματα $\underline{d} \in W^0$ είναι εφικτές κατευθύνσεις, επειδή το C είναι εσωτερικό σημείο της εφικτής περιοχής. Για τα σημεία D και E που βρίσκονται στο σύνορο της F πρέπει εκτός της $A\underline{d} = 0$ να ικανοποιούνται και επιπλέον συνθήκες.

Επειδή μας ενδιαφέρει η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου που εξετάζει μόνο ΒΕΛ, χρειάζεται να εστιάσουμε την προσοχή μας στις εφικτές κατευθύνσεις μιας ΒΕΛ, δηλαδή μιας κορυφής του F, και ιδιαίτερα σε εκείνες που οδηγούν από μια ΒΕΛ σε μια άλλη ΒΕΛ.

Έστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$, με βασικό πίνακα $B = (\underline{A}_{B(1)}, \dots, \underline{A}_{B(m)})$

Επειδή υποθέτουμε ότι η $\underline{x}$ είναι μη εκφυλισμένη ισχύει

$$x_i > 0 \text{ για } i = B(1), \dots, B(m) \text{ και } x_j = 0 \text{ για τα υπόλοιπα } j.$$

Για τη ΒΕΛ $\underline{x}$ θεωρούμε μια μη βασική $j \neq B(1), \dots, B(m)$ και μια εφικτή κατεύθυνση τέτοια ώστε $d_j = 1$ και $d_k = 0$ για $k \neq j, B(1), \dots, B(m)$. Αυτή η κατεύθυνση $\underline{d}$ οδηγεί σε λύσεις για τις οποίες όλες οι μη βασικές μεταβλητές της $\underline{x}$ διατηρούνται σε μηδενική τιμή εκτός από τη μεταβλητή x_j που παίρνει θετικές τιμές. Πραγματικά αυτό προκύπτει από τη μορφή της νέας λύσης

$$\underline{x} + \theta \underline{d} \quad \text{για} \quad \theta > 0.$$

Είναι σημαντικό να δούμε ότι η συνθήκη $d_j = 1$, $d_k = 0$, $k \neq j, B(1), \dots$ μαζί με την εξίσωση (2.7) προσδιορίζει μονοσήμαντα την εφικτή κατεύθυνση. Με άλλα λόγια υπάρχει μόνο μια εφικτή κατεύθυνση με την παραπάνω ιδιότητα. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι για να οριστεί πλήρως το διάνυσμα $\underline{d}$ πρέπει να οριστούν οι συντεταγμένες $d_{B(1)}, \dots, d_{B(m)}$. Από την εξίσωση $Ad = 0$ προκύπτει

$$Ad = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} d_k \underline{A}_k = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} d_{B(i)} \underline{A}_{B(i)} + \underline{A}_j = 0,$$

αφού $d_k = 0$ για $k \neq j, B(1), \ldots, B(m)$. Επομένως

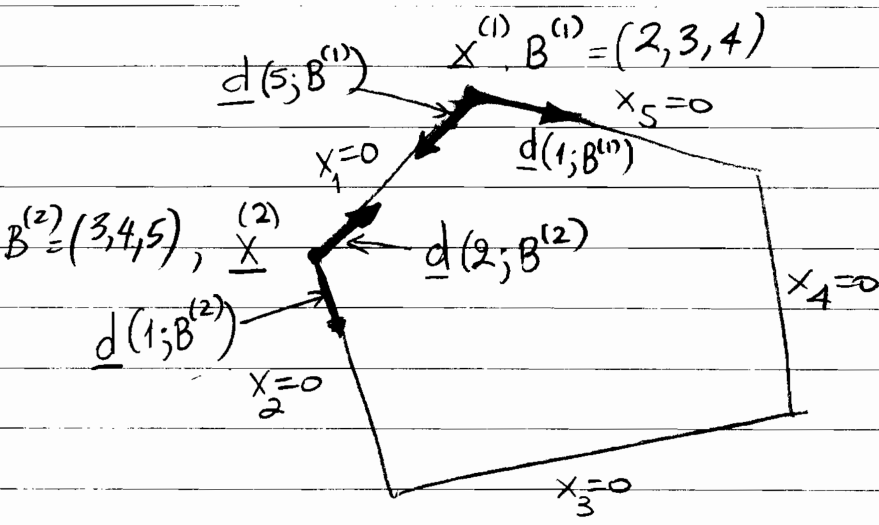
$$B\underline{d}_B + \underline{A}_j = 0 \Rightarrow B\underline{d}_B = -\underline{A}_j \Rightarrow \underline{d}_B = -B^{-1}\underline{A}_j,$$

όπου $\underline{d}_B = \begin{pmatrix} d_{B(1)} \\ \vdots \\ d_{B(m)} \end{pmatrix}$. Συνεπώς το διάνυσμα $\underline{d}$

είναι της μορφής $\underline{d} = \begin{pmatrix} -B^{-1}\underline{A}_j \\ 0 \\ \vdots \\ d_j = 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Το διάνυσμα $\underline{d}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες ονομάζεται η βασική κατεύθυνση-j της βάσης B και συμβολίζεται με $\underline{d}(j;B)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία των βασικών κατευθύνσεων φαίνεται στο Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8

Για παράδειγμα η ΒΕΛ $\underline{x}^{(1)}$ που αντιστοιχεί στο βασικό πίνακα $B^{(1)}$ προσδιορίζεται από την τομή των υπερεπιπέδων $x_1 = 0$, $x_5 = 0$. Επομένως για τη $\underline{x}^{(1)}$

μπορούν να οριστούν δύο βασικές κατευθύνσεις, η $\underline{d}(1; B^{(1)})$ και $\underline{d}(5; B^{(1)})$. Η $\underline{d}(1; B^{(1)})$ οδηγεί σε λύσεις

με $x_1 > 0$ και $x_5 = 0$ δηλαδή πάνω στην ακμή $x_5 = 0$ της F.

Αντίστοιχα η $\underline{d}(5; B^{(1)})$ οδηγεί σε λύσεις πάνω στην ακμή $x_1 = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι μια βασική κατεύθυνση οδηγεί από μια κορυφή της εφικτής περιοχής σε λύσεις πάνω σε μια ακμή της F

Το επόμενο ερώτημα είναι πού μπορεί να οδηγήσει η κίνηση πάνω σε μια βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j; B)$. Εδώ υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u> Το διάνυσμα $\underline{d}_B = -B^{-1}\underline{A}_j$ είναι τέτοιο

ώστε $d_{B(i)} < 0$ για ένα τουλάχιστον $i = 1, \dots, m$.

Σ' αυτή την περίπτωση αν πάρουμε λύσεις που βρίσκονται πάνω στην εφικτή κατεύθυνση, δηλαδή

$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j; B)$, αυτές θα είναι της μορφής

$$\underline{x}(\theta) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_{B(1)}+\theta d_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)}+\theta d_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} , \quad \text{για } \theta > 0. \qquad (2.8)$$

Για να είναι αυτές οι λύσεις εφικτές θα πρέπει $x(\theta) \geq 0$.

Έχουμε ότι $x_{B(i)} > 0$ $\forall i$, και $\theta > 0$. Θεωρούμε τώρα εκείνους τους δείκτες i για τους οποίους $d_{B(i)} \geq 0$. Για αυτούς ισχύει $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0$ επομένως η μη αρνητικότητα διατηρείται για κάθε $\theta > 0$. Από την άλλη πλευρά, για εκείνα τα i για τα οποία $d_{B(i)} < 0$, η απαίτηση

$$x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} \geq 0 \implies \theta \leq -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}$$

Βλέπουμε επομένως ότι για να είναι η νέα λύση εφικτή (δηλαδή να διατηρείται στην εφικτή περιοχή F) πρέπει

$$\theta \leq \min\left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i=1,\ldots,m,\ d_{B(i)} < 0 \right\} \qquad (2.9)$$

Έστω τώρα κάποιο i' για το οποίο επιτυγχάνεται το ελάχιστο στη (2.9):

$$\theta_{min} = -\frac{x_{B(i')}}{d_{B(i')}} = \min\left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}},\ i=1,\ldots,m,\ d_{B(i)} < 0 \right\}. \qquad (2.10)$$

Τότε αν πάρουμε τη λύση

$\underline{x}(\theta_{min}) = \underline{x} + \theta_{min}\,\underline{d}(j;B)$, θα ισχύει $x_{i'} = 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η λύση $\underline{x}(\theta_{min})$ είναι μια νέα ΒΕΛ, για την οποία η μεταβλητή $x_{i'} = 0$ είναι μη βασική και η μεταβλητή $x_j > 0$ είναι βασική, δηλαδή προκύπτει από την προηγούμενη με την εναλλαγή ρόλων μεταξύ μιας βασικής και μιας μη βασικής μεταβλητής.
Μια νέα ΒΕΛ αυτής της μορφής ονομάζεται γειτονική ΒΕΛ της αρχικής ΒΕΛ $\underline{x}$ στη βασική κατεύθυνση-j. Γεωμετρικά αντιστοιχεί σε μια νέα κορυφή της F που προκύπτει από την προηγούμενη κορυφή με κίνηση κατά μήκος μιας ακμής.

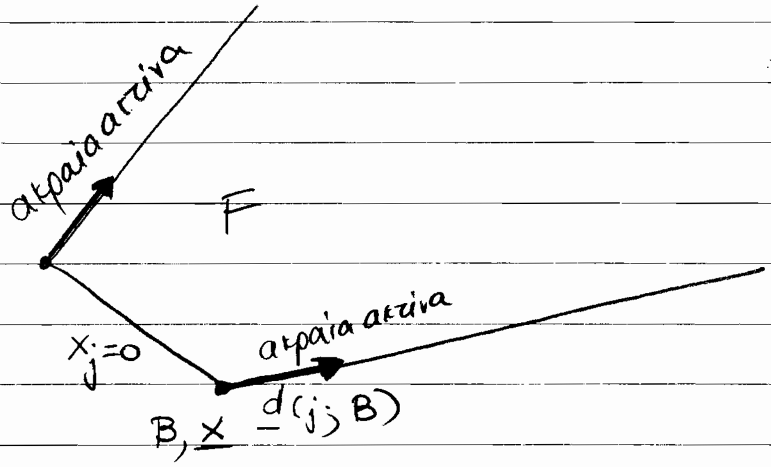
Για παράδειγμα στο σχήμα 2.8, από τη ΒΕΛ $\underline{x}^{(1)}$, η βασική κατεύθυνση $\underline{d}(5;B^{(1)})$ οδηγεί στη γειτονική ΒΕΛ $\underline{x}^{(2)}$ στην οποία η βασική μεταβλητή x_2 γίνεται μη βασική και η μη βασική μεταβλητή x_5 γίνεται βασική.

Παρατήρηση: Λόγω της υπόθεσης ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη εκφυλισμένες, ισχύει ότι στη νέα ΒΕΛ $\underline{x}(\theta_{min})$ όλες οι άλλες βασικές μεταβλητές $x_{B(i)} + \theta_{min} d_{B(i)} > 0$,

δηλαδή το θ_{min} στη (2.10) επιτυγχάνεται μόνο από το δείκτη i. Σε διαφορετική περίπτωση, για $\theta = \theta_{min}$ θα μηδενίζονταν περισσότερες από μια βασικές μεταβλητές της $\underline{x}$ και η νέα ΒΕΛ $\underline{x}(\theta_{min})$ θα ήταν εκφυλισμένη.

Περίπτωση 2   Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου για τη βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ισχύει $d_{B(i)} \geq 0 \quad \forall\, i=1,\dots,m$. Τότε αν πάρουμε οποιαδήποτε λύση $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$, αυτή θα είναι της μορφής (2.8) και $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0 \quad \forall\, i=1,\dots,m, \ \forall\, \theta$.

Επομένως $\underline{x}(\theta) \geq 0 \quad \forall\, \theta > 0$, δηλαδή όλα τα σημεία πάνω στην ημιευθεία που ξεκινά από την κορυφή $\underline{x}$ και ορίζεται από την κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ανήκουν στην εφικτή περιοχή F. Αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή είναι μη φραγμένο σύνολο και η κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ταυτίζεται με μια από τις ακμές που εκτείνονται στο άπειρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.9



Σχήμα 2.9

Μια βασική κατεύθυνση $d(j;B)$ για την οποία ισχύει $d_B = -B^{-1}A_j \geq 0$, ονομάζεται *ακραία κατεύθυνση* ή *ακραία ακτίνα* (extreme ray) του κυρτού πολυέδρου F. Από την προηγούμενη συζήτηση προκύπτει ότι ένα κυρτό πολύεδρο F έχει ακραίες ακτίνες μόνο όταν είναι μη φραγμένο και σε αυτή την περίπτωση οι ακραίες ακτίνες αντιστοιχούν στις ακμές που ορίζονται από μια μόνο κορυφή και εκτείνονται στο άπειρο. Για παράδειγμα το κυρτό πολύεδρο του Σχήματος 2.9 έχει δύο ακραίες ακτίνες.

Συνοψίζοντας, έχουμε δει ότι αν από μια ΒΕΛ κινηθούμε κατά μήκος μιας βασικής κατεύθυνσης, τότε είτε θα μεταφερθούμε σε μια γειτονική ΒΕΛ, είτε θα κινηθούμε απεριόριστα κατά μήκος μιας ακραίας ακτίνας της εφικτής περιοχής.

Πρόταση 2.2 Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένη, τότε κάθε βασική κατεύθυνση οδηγεί σε μια νέα ΒΕΛ.

Η απόδειξη είναι προφανής.

Η προηγούμενη συζήτηση μας έδωσε τον αλγεβρικό μηχανισμό με τον οποίο μπορούμε να κινηθούμε από μια ΒΕΛ σε μια γειτονική.
Ακόμη όμως δεν έχουμε απαντήσει στο αρχικό ερώτημα αυτής της ενότητας, που είναι πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν μια ΒΕΛ είναι βέλτιστη από τοπική πληροφορία και μόνο, χωρίς δηλαδή να τη συγκρίνουμε με τις υπόλοιπες ΒΕΛ.

Η έννοια της βασικής κατεύθυνσης θα αποδειχθεί σημαντική και για αυτό το ερώτημα.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια ΒΕΛ $\underline{x}$, με βασικό πίνακα B. Θέλουμε να δούμε πώς επηρεάζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν κινηθούμε κατά μήκος της βασικής κατεύθυνσης $\underline{d}(j;B)$.

Έστω $f(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$ η τιμή της αντικ. συνάρτησης στη ΒΕΛ $\underline{x}$. Τότε για $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$ έχουμε·

$$f(\underline{x}(\theta)) = \underline{c}'\underline{x} + \theta \underline{c}'\underline{d}(j;B) = f(\underline{x}) + \theta \underline{c}'\underline{d}(j;B)$$

Όμως από τη μορφή του διανύσματος

$$\underline{d}(j;B) = \begin{pmatrix} \underline{d}_B \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ προκύπτει ότι}$$

$$\underline{c}'\underline{d}(j;B) = \underline{c}_B'\underline{d}_B + c_j = -\underline{c}_B'B^{-1}\underline{A}_j + c_j$$

Έστω $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B'B^{-1}\underline{A}_j$. Από τα παραπάνω προκύπτει

ότι $f(\underline{x}(\theta)) = f(\underline{x}) + \bar{c}_j\,\theta$.

Επομένως σε λύσεις πάνω στη βασική διεύθυνση-j από την ΒΕΛ $\underline{x}$ η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνεται με ρυθμό $\bar{c}_j$ ανά μονάδα απόστασης από τη $\underline{x}$.

Ορισμός 2.6 Η ποσότητα

$$\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j = \underline{c}' \underline{d}(j;B) \qquad (2.11)$$

ονομάζεται <u>ελαττωμένο κόστος</u> (reduced cost) της μεταβλητής x_j στην ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B.

Η σημασία του ελαττωμένου κόστους βρίσκεται στη διαμόρφωση του κριτηρίου βελτιστότητας. Πραγματικά, αν $\bar{c}_j > 0$, τότε η κίνηση πάνω στην βασική κατεύθυνση-j οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης και επομένως σε καλύτερες λύσεις. Από αυτό προκύπτει ότι η ΒΕΛ δεν μπορεί να είναι βέλτιστη.
Αυτό που μένει να απαντηθεί είναι το αντίθετο ερώτημα: Αν $\bar{c}_j \le 0$ για κάθε βασική κατεύθυνση-j τότε είναι η ΒΕΛ $\underline{x}$ βέλτιστη; Είναι σημαντικό να δούμε ότι η απάντηση δεν είναι προφανής. Αν ισχύει αυτή η ιδιότητα τότε η $\underline{x}$ είναι εξίσου καλή ή καλύτερη από όλες τις γειτονικές ΒΕΛ, είναι δηλαδή σημείο τοπικού μεγίστου στο σύνολο των ΒΕΛ. Για να είναι βέλτιστη λύση του π.γ.π θα πρέπει να είναι σημείο ολικού μεγίστου στο σύνολο των ΒΕΛ.
Εδώ θα μπορούσε να πει κανείς ότι αφού η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$ είναι γραμμική, τα τοπικά ακρότατα είναι και ολικά. Αυτό είναι σωστό, αλλά για να γίνει η απόδειξη με αυτό τον τρόπο θα πρέπει να δειχθεί ότι η $\underline{x}$ είναι τοπικό μέγιστο για όλα τα $\underline{y} \in F$ γειτονικά σημεία της $\underline{x}$ και όχι μόνο για τις γειτονικές ΒΕΛ. Αυτή την πορεία απόδειξης ακολουθούμε στην επόμενη πρόταση.
Πρώτα αποδεικνύουμε ένα ενδιάμεσο λήμμα που έχει

από μόνο του ενδιαφέρον.

Λήμμα 2.1 Έστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B, σύνολο βασικών δεικτών $I_B = \{B(1), \ldots, B(m)\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$

και σύνολο μη βασικών δεικτών $I_N = \{1, \ldots, n\} - I_B$.

Έστω επίσης μια εφικτή κατεύθυνση $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_n)'$ στη ΒΕΛ $\underline{x}$

Τότε ισχύει:

(i) $d_j \geq 0$, $j \in I_N$

(ii) $$\underline{d} = \sum_{j \in I_N} d_j \, \underline{d}(j; B) \qquad (2.12)$$

Απόδειξη (i) Αφού το $\underline{d}$ είναι εφικτή κατεύθυνση ισχύει
$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$ για κάποιο $\theta > 0$
Όμως για τη ΒΕΛ $\underline{x}$ ισχύει $x_j = 0 \;\; \forall j \in I_N$
Επομένως $x_j(\underline{\theta}) = \theta d_j \geq 0$, συνεπώς $d_j \geq 0$

(ii) Από την αναγκαία συνθήκη (2.7) παίρνουμε

$$A\underline{d} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j \underline{A}_j = 0 \Rightarrow \sum_{j \in I_B} d_j \underline{A}_j + \sum_{j \in I_N} d_j \underline{A}_j = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\underline{d}_B = -\sum_{j \in I_N} d_j \underline{A}_j \Rightarrow \underline{d}_B = -\sum_{j \in I_N} d_j B^{-1} \underline{A}_j$$

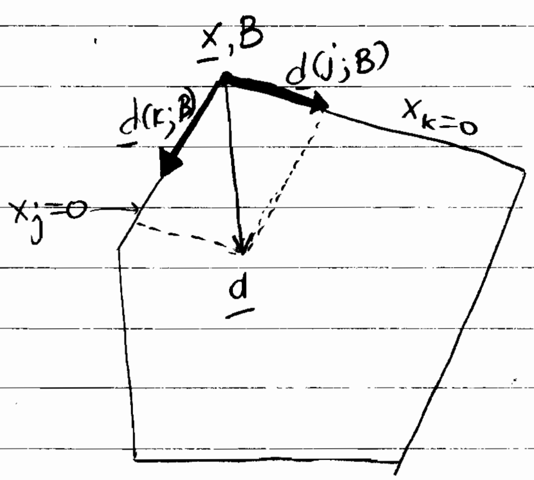
Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα της βασικής κατεύθυνσης-j

$$\underline{d}(j; B) = (-B^{-1}\underline{A}_j, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, \ldots, 0)$$

Επομένως το $\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{d}_B \\ \underline{d}_N \end{pmatrix}$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\underline{d} = \sum_{j \in N} d_j \, \underline{d}(j;B),$$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη ■

Η γεωμετρική ερμηνεία του Λήμματος 2.1 είναι ότι κάθε εφικτή κατεύθυνση από μια κορυφή του κυρτού πολυέδρου F ανήκει στον κώνο που ορίζεται από τις ακμές που τέμνονται σ' αυτή την κορυφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10.



Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 2.1 μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη βελτιστότητα της ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι η $\bar{c}_j \leq 0 \;\; \forall j$.

Πριν αποδείξουμε το βασικό θεώρημα, κάνουμε την εξής παρατήρηση. Το ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j$ έχει οριστεί από την (2.11) για τις μη βασικές μεταβλητές. Αν επεκτείνουμε τον ορισμό

$\bar{c}_j = c_j - B^{-1}A_j$ και για $j \in I_B$, τότε είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\bar{c}_j = 0$ για $j \in I_B$ (βλ. Άσκηση 2.3)

Θεώρημα 2.2 Έστω ότι όλες οι ΒΕΛ είναι μη εκφυλισμένες. Τότε μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B είναι βέλτιστη αν κ' μόνο αν $\bar{c}_j \le 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Απόδειξη Επειδή $\bar{c}_j = 0$ για $j \in I_B$, αρκεί να θεωρήσουμε $j \in I_N$.
Πρώτα υποθέτουμε $\bar{c}_j \le 0 \quad \forall j \in N$.
Έστω μια εφικτή διεύθυνση $\underline{d}$ στη ΒΕΛ $\underline{x}$. Τότε $\exists\ \theta > 0$ τέτοιο ώστε $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d} \ge 0$.
Επειδή το σύνολο F είναι κυρτό και $\underline{x}, \underline{x}(\theta) \in F$, κάθε σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\underline{x}, \underline{x}(\theta)$ επίσης ανήκει στο F, επομένως

$$\underline{x}(\theta') = \underline{x} + \theta' \underline{d} \ge 0 \quad \forall\ \theta' \in [0, \theta]$$

Επίσης $\forall\ \theta' \in [0, \theta]$: $f(\underline{x}(\theta')) = \underline{c}'(\underline{x} + \theta' \underline{d}) = f(\underline{x}) + \theta' \underline{c}' \underline{d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\underline{x}(\theta')) - f(\underline{x}) = \theta' \underline{c}' \underline{d} = \theta' . \underline{c}' \sum_{j \in I_N} d_j \underline{d}(j, B) =$$

$$= \theta' \sum_{j \in I_N} d_j \bar{c}_j, \quad (d_j \ge 0)$$ λόγω του Λήμματος 2.1 κ' του Ορισμού 2.6. Επομένως,

από την υπόθεση $\bar{c}_j \le 0$ προκύπτει $f(\underline{x}(\theta')) - f(\underline{x}) \le 0$

Δείξαμε επομένως ότι αν κινηθούμε από την ΒΕΛ $\underline{x}$ κατά μήκος οποιασδήποτε εφικτής κατεύθυνσης η αντικειμενική συνάρτηση δεν αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι η $\underline{x}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου στο σύνολο F, κ' επομένως αφού η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική, η $\underline{x}$ είναι σημείο ολικού μεγίστου, δηλαδή η ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι βέλτιστη λύση.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\bar{c}_j > 0$ για κάποιο $j \in I_N$. Τώρα θεωρούμε τη βασική κατεύθυνση -j $\underline{d}(j;B)$ και παίρνουμε

$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$, για $0 < \theta < \theta_{min}$, όπου το

θ_{min} δίνεται από τη (2.10) κ' λόγω της υπόθεσης περί μη εκφυλισμένων ΒΕΛ, $\theta_{min} > 0$.

Τότε έχουμε $f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta \bar{c}_j > 0$, δηλαδή

υπάρχει τουλάχιστον μια λύση $\underline{x}(\theta) \in F$ τέτοια ώστε $f(\underline{x}(\theta)) > f(\underline{x})$, επομένως η $\underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη. Τώρα η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης ∎

Το Θεώρημα 2.2 εξασφαλίζει την ύπαρξη κριτηρίου βελτιστότητας για κάθε ΒΕΛ $\underline{x}$. Όσον αφορά τη μέθοδο βελτίωσης για την περίπτωση που η $\underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη, έχουμε δει ότι αν κινηθούμε σε μια κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ για την οποία ισχύει $\bar{c}_j > 0$ θα οδηγηθούμε σε καλύτερη λύση. Όπως έχουμε δει προηγουμένως, αν για την κατεύθυνση αυτή ισχύει $d_{B(i)} < 0$ για κάποιο $i = 1, \cdots, m$, τότε θέτοντας $\theta = \theta_{min}$ από τη σχέση (2.10), η νέα λύση

$\underline{x}(\theta_{min}) = \underline{x} + \theta_{min} \underline{d}(j;B)$ είναι μη εκφυλισμένη ΒΕΛ, και επειδή $\bar{c}_j > 0$ έχει τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυστηρά μεγαλύτερη από την προηγούμενη. Σ' αυτή την περίπτωση το επαναληπτικό βήμα του αλγορίθμου βελτίωσ[ης] έχει ολοκληρωθεί, και μια νέα επανάληψη μπορεί να ξεκινήσει με τη ΒΕΛ $\underline{x}(\theta_{min})$ στη θέση της προηγούμενης $\underline{x}$

Μένει να δούμε τι γίνεται αν για την βασική κατεύθυνση-j, $\underline{d}(j;B)$, για την οποία $\bar{c}_j > 0$, ισχύει επίσης $d_{B(i)} \geq 0 \ \forall i=1,\dots$

Όπως έχουμε επίσης συζητήσει προηγουμένως, στην περίπτωση αυτή κάθε λύση $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d}(j;B)$, $\theta > 0$ είναι εφικτή.

Επίσης $f(\underline{x}(\theta)) = f(\underline{x}) + \theta \bar{c}_j$, και επειδή $\bar{c}_j > 0$ παίρνουμε

$$\sup_{\theta > 0} f(\underline{x}(\theta)) = +\infty$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι αν για μια ΒΕΛ $\underline{x}$ και μια βασική κατεύθυνση $\underline{d}(j;B)$ ισχύει $\bar{c}_j > 0$ και $d_{B(i)} \geq 0$, $i=1,\dots,m$, τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.

Παρατηρούμε τώρα ότι για την εφικτή κατεύθυνση j ισχύει $d_j \geq 0$ $\forall j \in$ επομένως αν $d_{B(i)} \geq 0$ $\forall i$ τότε $\underline{d}(j;B) \geq 0$.

Χρησιμοποιώντας εντελώς ανάλογους συλλογισμούς, μπορούμε να αποδείξουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα σχετικά με το χαρακτηρισμό ενός π.γ.π. ως μη φραγμένου

<u>Θεώρημα 2.3</u> Το π.γ.π. (2.1) είναι μη φραγμένο (δηλ. $z = +\infty$) αν και μόνο αν υπάρχει ΒΕΛ $\underline{x}$ και εφικτή κατεύθυνση $\underline{d}$ τέτοια ώστε $\underline{d} \geq 0$ και $\underline{c}'\underline{d} > 0$.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Με βάση την παραπάνω συζήτηση μπορούμε τώρα να γράψουμε συνοπτικά μια εκδοχή του αλγορίθμου Simplex, για την περίπτωση που όλες οι βασικές εφικτές λύσεις είναι μη εκφυλισμένες:

Αλγόριθμος Simplex

1. Έστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B, σύνολο βασικών δεικτών $I_B = \{B(1), \dots, B(m)\}$ και μη βασικών $I_N = \{1, \dots, n\} - I_B$.
Ισχύει ότι $\underline{x}_B = (x_j, j \in I_B)' = B^{-1}\underline{b}$, και $\underline{x}_N = (x_j, j \in I_N) =$
Επίσης έστω $\underline{c}_B = (c_j, j \in I_B)' = (c_{B(1)}, \dots, c_{B(m)})'$.

2. Υπολογίζουμε τα ελαττωμένα κόστη $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j$, για $j \in I_N$. Αν $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j \in I_N$ τότε η ΒΕΛ $\underline{x}$ είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος σταματά.
Διαφορετικά επιλέγουμε κάποιο $j \in I_N$ τέτοιο ώστε $\bar{c}_j > 0$

3. Υπολογίζουμε το διάνυσμα βασικής κατεύθυνσης $\underline{d}(j;B)$,
$$\underline{d}(j;B) = \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}\!\!\!\!\begin{pmatrix} -B^{-1}\underline{A}_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Αν $\underline{d}(j;B) \geq 0$ τότε το πρόβλημα είναι μη φραγμένο και $z = +\infty$.

4. Διαφορετικά θέτουμε: $\theta_{min} = \min\left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} : i = 1, \dots, m, \ d_{B(i)} < 0 \right\}$
και παίρνουμε τη νέα ΒΕΛ $\underline{x}^{new} = \underline{x} + \theta_{min}\underline{d}(j;B)$
Θέτουμε $\underline{x} \leftarrow \underline{x}^{new}$ και επιστρέφουμε στο βήμα 1

Παρατηρήσεις ① Αν στο βήμα 2 υπάρχουν περισσότερα από ένα $j \in I_N$ με $\bar{c}_j > 0$, τότε ο αλγόριθμος μπορεί να προχωρήσει επιλέγοντας αυθαίρετα οποιοδήποτε από αυτά τα j. Σε προγραμματιστικές υλοποιήσεις του αλγορίθμου συνήθως επιλέγεται εκείνο το j που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή του $\bar{c}_j$.

② Όπως έχει συζητηθεί στη σελ. 2.32, κάτω από την υπόθεση μη εκφυλισμένων ΒΕΛ, το ελάχιστο στο θ_{min} του βήματος 4 επιτυγχάνεται από ένα μοναδικό $B(i)$, και επομένως η νέα ΒΕΛ $\underline{x}^{new}$ είναι επίσης μη εκφυλισμένη.

③ Αν δεν κάνουμε την παραπάνω υπόθεση, τότε ο αλγόριθμος Simplex μπορεί να περιπλακεί. Για παράδειγμα, αν $\underline{x}$ είναι εκφυλισμένη και ισχύει $\bar{c}_j > 0$ για μια βασική κατεύθυνση j, τότε υπάρχει περίπτωση $\theta_{min} = 0$, αν για κάποιο i με $d_{B(i)} < 0$ ισχύει επίσης $x_{B(i)} = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η νέα λύση μετά το βήμα βελτίωσης $\underline{x}^{new} = \underline{x}$, δηλαδή ταυτίζεται με την προηγούμενη, αλλά με διαφορετικό βασικό πίνακα B (όπως έχουμε δει σε μια εκφυλισμένη ΒΕΛ μπορεί να αντιστοιχούν περισσότεροι από ένας βασικοί πίνακες).
Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει εγγύηση ότι σε κάθε βήμα της μεθόδου η αντικειμενική συνάρτηση έχει αυστηρά θετική βελτίωση, και επομένως ότι ο αλγόριθμος θα σταματήσει μετά από πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.
Έχουν αναπτυχθεί εκδοχές της μεθόδου Simplex που εξασφαλίζουν τερματισμό ακόμα και στην περίπτωση εκφυλισμένων ΒΕΛ. Η ανάλυση αυτών των μεθόδων θα γίνει σε μεταγενέστερη έκδοση αυτών των σημειώσεων.

2.5. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΡΜΗΝΕΙΕΣ

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, το ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j$ μιας μη βασικής μεταβλητής x_j σε μια ΒΕΛ $\underline{x}$ παίζει σημαντικό ρόλο ως κριτήριο βελτιστότητας της $\underline{x}$.
Όμως σε αρκετές εφαρμογές έχει ενδιαφέρουσα οικονομική ερμηνεία. Για να το δούμε αυτό υπενθυμίζουμε ότι αν από τη ΒΕΛ $\underline{x}$ κινηθούμε κατά μήκος της βασικής κατεύθυνσης j, η επίπτωση στην αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$f(\underline{x}(\theta)) - f(\underline{x}) = \theta\,\bar{c}_j$$

Επίσης στη νέα λύση $\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta\,\underline{d}(j;B)$, επειδή $d_j = 1$, $x_j = 0$ ισχύει $x_j(\theta) = x_j + \theta d_j = \theta$.

Επομένως η ποσότητα $\bar{c}_j$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης ανά μονάδα αύξησης της μη βασικής μεταβλητής x_j, κατά την κίνηση κατά μήκος της βασικής κατεύθυνσης $-j$.

Ειδικά στην περίπτωση που η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη, οπότε $\bar{c}_j \leq 0$ $\forall j \in I_N$, το $\bar{c}_j$ δίνει το ρυθμό μείωσης του βέλτιστου κέρδους αν επιτρέψουμε η μη βασική μεταβλητή x_j να πάρει θετική τιμή.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το πρόβλημα (2.1) προέρχεται από ένα πρόβλημα οργάνωσης παραγωγής μιας περιόδου, όπως στην

Ενότητα 1.2. Έστω ότι η μεταβλητή x_j συμβολίζει την ποσότητα παραγωγής για κάποιο προϊόν j, και η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underline{x})$ είναι το συνολικό καθαρό κέρδος. Αν στη βέλτιστη λύση $\underline{x}^*$ η μεταβλητή x_j είναι μη βασική, δηλαδή $x_j = 0$, τότε $\bar{c}_j \leq 0$, και το προϊόν j δεν παράγεται.

Σε αυτή την περίπτωση το $\bar{c}_j$ ερμηνεύεται ως η μείωση στο συνολικό κέρδος ανά μονάδα παραγωγής του προϊόντος j, στην περίπτωση που απαιτούσαμε να παραχθεί μια θετική ποσότητα από αυτό το προϊόν, χωρίς να αλλάξει τίποτα από τα υπόλοιπα στοιχεία του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η μεταβλητή x_j είναι περιθώρια μεταβλητή που προέρχεται από ένα περιορισμό της μορφής

$$\underline{a}_j'\underline{y} \leq b_j \Rightarrow \underline{a}_j'\underline{y} + x_j = b_j .$$

Έστω ότι ο περιορισμός αντιστοιχεί σε μια πρώτη ύλη από την οποία υπάρχουν b_j διαθέσιμες μονάδες για την παραγωγή, ενώ $\underline{y}$ είναι το διάνυσμα των ποσοτήτων παραγωγής.

Αν στη βέλτιστη λύση η x_j είναι μη βασική, με $\bar{c}_j \leq 0$, τότε το $\bar{c}_j$ δηλώνει τη μείωση του κέρδους ανά μονάδα αύξησης της x_j, όπως και προηγουμένως. Εδώ όμως $x_j = 0$ σημαίνει ότι η αντίστοιχη πρώτη ύλη εξαντλείται εντελώς. Αύξηση της x_j σε θετικό επίπεδο σημαίνει ότι απαιτούμε να μείνει αδιάθετη μια θετική ποσότητα της πρώτης ύλης. Επομένως το $\bar{c}_j$ ερμηνεύεται ως η μείωση στο κέρδος που συνεπάγεται η απαίτηση να παραμείνει κάποια ποσότητα της πρώτης ύλης, ανά μονάδα αδιάθετης ποσότητας.

2.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.1 Έστω πίνακας $A_{m\times n}$ με $r(A)=m<n$, και $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_k$, με $k<m$, γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A.

Δείξτε ότι υπάρχουν $m-k$ επιπλέον στήλες του A, $A_{k+1},\dots,A_m$, έτσι ώστε οι $\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_m$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(Υπόδειξη: Δείτε το θεώρημα συμπλήρωσης βάσης, σελ. [ ]).

Άσκηση 2.2 Για το π.γ.π. (2.1) δείξτε ότι, αν $\underline{b}=0$, τότε είτε το διάνυσμα $\underline{x}=0$ είναι βέλτιστη λύση, ή διαφορετικά το πρόβλημα είναι μή φραγμένο $(z=+\infty)$.

Άσκηση 2.3 Για μια ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, δείξτε ότι $\bar{c}_j=0$ για $j\in I_B$.

Άσκηση 2.4 Αποδείξτε το Θεώρημα 2.3.

Άσκηση 2.5 Θεωρήστε το π.γ.π.

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 2x_1+x_2\\
\text{υ.π.}\quad & x_1-x_2\le 4\\
& x_1+x_2\le 8\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

a) Μετατρέψτε το πρόβλημα σε κανονική μορφή

b) Εφαρμόστε τη μέθοδο Simplex όπως έχει αναπτυχθεί σε αυτό το κεφάλαιο, ξεκινώντας από τη ΒΕΛ για την οποία $x_1 = x_2 = 0$.

γ) Επιλύστε το πρόβλημα γραφικά και δείξτε πάνω στο γράφημα τις κορυφές από τις οποίες διέρχεται η εφαρμογή της μεθόδου Simplex στο (β).

Άσκηση 2.6 Για το πρόβλημα (2.1) έστω μια εφικτή λύση $\underline{x}$ (όχι απαραίτητα βασική). Αποδείξτε ότι η $\underline{x}$ είναι βέλτιστη αν και μόνο αν το παρακάτω Π.Γ.Π έχει βέλτιστη τιμή 0:

$$\max \ \underline{c}'\underline{d}$$
$$\text{υ.π.} \quad A\underline{d} = 0$$
$$d_i \geq 0 \quad \forall i \in Z,$$

όπου $Z = \{j : x_j = 0\}$.

(Η άσκηση αυτή συνεπάγεται ότι το κριτήριο βελτιστότητας είναι εξίσου δύσκολο πρόβλημα με την επίλυση ενός νέου Π.Γ.Π.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ένα τοπικό μέγιστο είναι και ολικό).

Άσκηση 2.7 Έστω μια βέλτιστη ΒΕΛ $\underline{x}$ για την οποία ισχύει $\bar{c}_j = 0$ για κάποιο $j \in I_N$. Τι συμπεραίνετε από αυτή την ιδιότητα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2.8 Θεωρήστε το παρακάτω πρόβλημα Π.Γ.Π

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{υ.π.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

(α) Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Πρόβλημα φόρτωσης σακκιδίου (knapsack problem). Υποθέστε ότι $c_j, a_j \geq 0$ $\forall j=1,\ldots,n$ και περιγράψτε μια εφαρμογή που θα κατέληγε σε αυτό το μοντέλο.

(β) Θεωρήστε τώρα τη γενική περίπτωση $c_j, a_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\ldots,n$. Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε το πρόβλημα σακκιδίου να έχει εφικτή λύσεις.

(γ) Για την περίπτωση που το πρόβλημα είναι εφικτό δείξτε ότι η εφαρμογή της μεθόδου Simplex καταλήγει σε ένα απλό αλγόριθμο για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

Άσκηση 2.9 Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια κοίλη συνάρτηση και $F \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σύνολο. Έστω $x^* \in F$ ένα σημείο τοπικού μεγίστου της f στο F, δηλαδή $\exists\ \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x^*)$ $\forall\ x \in F$ με $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$. Δείξτε ότι το x^* είναι σημείο ολικού μεγίστου της f στο F, δηλαδή ότι $f(x) \leq f(x^*)$ $\forall\ x \in F$.

Άσκηση 2.10 Για τα μοντέλα Γ.Π. που αντιστοιχούν στις εφαρμογές του Κεφαλαίου 1, δώστε οικονομική ερμηνεία στο ελαττωμένο κόστος $\bar{c}_j$ των διαφόρων μεταβλητών x_j αν υποτεθεί ότι σε μια βέλτιστη λύση αυτές οι μεταβλητές είναι μη βασικές. (Δώστε την ερμηνεία σε όσες περιπτώσεις αυτή έχει κάποιο νόημα - σε κάποιες μπορεί και να μην έχει).

Άσκηση 2.11 Θεωρήστε το πολύεδρο:

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, \ A\underline{x} = b \}, \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(α) Κάντε τη γραφική αναπαράσταση του προβλήματος σύμφωνα με τις δύο γεωμετρικές προσεγγίσεις αυτού του κεφαλαίου.

(β) Βρείτε όλους τους βασικούς πίνακες. Για καθένα, βρείτε και χαρακτηρίστε την αντίστοιχη βασική λύση (αν δηλαδή είναι ή όχι εφικτή και εκφυλισμένη).

(γ) Στη γραφική παράσταση του πολυέδρου δείξτε όλες τις βασικές λύσεις, ανεξάρτητα από το αν είναι εφικτές ή όχι, και προσδιορίστε τις ευθείες που τέμνονται σε κάθε μια Β.Λ.

(δ) Αν το F είναι μη φραγμένο προσδιορίστε τις ακραίες ακτίνες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΧΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

3.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τις βασικές αρχές από τη θεωρία βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς από τις οποίες προκύπτει η έννοια του δυϊκού προβλήματος και γενικότερα η θεωρία δυϊκότητας.

Η βασική ιδέα της δυϊκότητας είναι ότι για κάθε π.γ.π ορίζεται μονοσήμαντα ένα άλλο π.γ.π., που ονομάζουμε δυϊκό του αρχικού προβλήματος. Τα δύο προβλήματα είναι στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους με μια σειρά από ιδιότητες, που αποτελούν τη θεωρία της δυϊκότητας.

Η μελέτη της δυϊκότητας είναι χρήσιμη τόσο από θεωρητική άποψη, καθώς επιτρέπει την βαθύτερη κατανόηση της δομής του γραμμικού προγραμματισμού, όσο και από άποψη εφαρμογών, καθώς επιτρέπει κάποιες επιπλέον ενδιαφέρουσες οικονομικές ερμηνείες. Τέλος από υπολογιστική σκοπιά οδηγεί σε εναλλακτικές μορφές της μεθόδου Simplex πού σε ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων είναι πιο αποτελεσματικές.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας δυϊκότητας είναι χρήσιμο να εκφράσουμε ένα π.γ.π. σε ημικανονική μορφή αντί της κανονικής που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οπως έχουμε δεί στο Κεφάλαιο 1 (Ενότητα 1.1), η ημικανονική μορφή ορίζεται ως πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς της μορφής $\leq$ και μη αρνητικές μεταβλητές. Γνωρίζουμε επίσης ότι οποιοδήποτε π.γ.π μπορεί με κατάλληλους μετασχηματισμούς να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα σε ημικανονική μορφή. Επομένως ο περιορισμός σε προβλήματα ημικανονικής μορφής είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Για λόγους συμμετρίας που θα γίνουν φανεροί παρακάτω, είναι βολικό να ορίσουμε την ημικανονική μορφή με κάπως γενικότερο τρόπο. Συγκεκριμένα:

<u>Ορισμός 3.1</u> Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού βρίσκεται σε <u>ημικανονική μορφή</u> (ΗΚ) αν έχει εκφραστεί με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους:

$$\begin{array}{lll} z=\max \underline{c}'\underline{x} & & z=\min \underline{c}'\underline{x} \\ \text{υ.π. } \underline{A}\,\underline{x}\leq \underline{b} & \text{ή} & \text{υ.π. } \underline{A}\,\underline{x}\geq \underline{b} \\ \underline{x}\geq 0 & & \underline{x}\geq 0 \end{array} \qquad (3.1)$$

όπου $\underline{c}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{b}\in\mathbb{R}^m$, A πίνακας $m\times n$ και το διάνυσμα μεταβλητών απόφασης $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$.

Για την πρώτη περίπτωση λέμε ότι το πρόβλημα εκφράζεται στην <u>ημικανονική μορφή μεγιστοποίησης</u> (ΗΚ-max) ενώ για τη δεύτερη στην <u>ημικανονική μορφή ελαχιστοποίησης</u> (ΗΚ-min).

Βλέπουμε από τον Ορισμό 3.1 ότι ένα πρόβλημα σε ΗΚ-μορφή μπορεί να είναι πρόβλημα είτε μεγιστοποίησης είτε ελαχιστοποίησης. Στην πρώτη περίπτωση όλοι οι περιορισμοί είναι $\leq$ ενώ στη δεύτερη $\geq$. Ορίζουμε επομένως την προβλεπόμενη φορά των περιορισμών ως τη φορά $\leq$ για προβλήματα max και τη φορά $\geq$ για προβλήματα min. Τώρα μπορούμε να πούμε ότι ένα π.γ.π. είναι γενικά σε ΗΚ-μορφή αν όλοι οι περιορισμοί είναι ανισότητες της προβλεπόμενης φοράς και όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ένα π.γ.π. σε ΗΚ μορφή ορίζεται μονοσήμαντα από μια εξάδα της μορφής

$$P = HK(\rho, A, \underline{b}, \underline{c}) \qquad (3.2)$$

όπου $\rho \in \{0,1\}$ ($\rho=0$ για min και $\rho=1$ για max) αντιστοιχεί στο κριτήριο βελτιστοποίησης,

A ο $m \times n$ πίνακας των περιορισμών, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ το δεξιό μέρος των περιορισμών και $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης (προφανώς το διάνυσμα μεταβλητών μπορεί να συμβολιστεί με οποιοδήποτε n-διάστατο διάνυσμα και δεν είναι μέρος των δεδομένων του προβλήματος αλλά απλώς μια βοηθητική μεταβλητή).

Για παράδειγμα το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

γράφεται συνοπτικά ως $P = HK(1, A, b, c)$,

με $A = (1,1)$, $b = 5$, $c = \binom{1}{2}$.

Παρατήρηση Στο συμβολισμό της εξίσωσης (3.2) χρησιμοποιούμε και την έκφραση HK που υποδηλώνει ότι το πρόβλημα είναι σε HK-μορφή. Αυτό βοηθάει στο να αποφεύγονται συγχύσεις, καθώς με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσε να οριστεί αντίστοιχος συμβολισμός για προβλήματα σε κανονική μορφή, όπου για παράδειγμα

$$P = KM(A, \underline{b}, \underline{c}) \tag{3.3}$$

υποδηλώνει το πρόβλημα της εξίσωσης (2.1), κεφ. 2.

Αν δεν υπήρχε η διάκριση HK, KM θα μπορούσε να δημιουργηθεί σύγχυση σχετικά με το ποιο πρόβλημα εννοούμε κάθε φορά.

3.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ - ΑΣΘΕΝΗΣ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ

Συνήθως στη βιβλιογραφία δίνεται ο ορισμός του δυϊκού προβλήματος για ένα δοσμένο π.γ.π. και αναφέρονται οι ιδιότητές του. Είναι όμως προτιμότερο να γίνει πρώτα μια σύντομη θεωρητική εισαγωγή από την οποία ο ορισμός θα προκύψει με διαισθητικό τρόπο.

Θεωρούμε ενα π.γ.π. σε μορφή HK-max : $P = HK(1, A, b, c)$:

$$\begin{aligned} z_P = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\ A\underline{x} &\le \underline{b} \\ \underline{x} &\ge 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Μια σημαντική μέθοδος προσέγγισης προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς είναι μέσω της Λαγκρανζιανής συνάρτησης που προκύπτει αν κάποιοι ή όλοι από τους περιορισμούς μεταφερθούν στην αντικειμενική συνάρτηση ως ποινή για την παραβίασή τους. Θα δείξουμε πώς αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα (3.4).

Ορίζουμε τη συνάρτηση $L : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε για $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$:

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} + \underline{w}' \cdot (\underline{b} - A\underline{x}) \tag{3.5}$$

Η L μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής:

$$L(\underline{x}, \underline{w}) = \underline{c}'\underline{x} - \sum_{i=1}^{m} w_i (\underline{a}_i \underline{x} - b_i),$$

δηλαδή προκύπτει αν από την αντικειμενική συνάρτηση του (3.4) αφαιρεθεί μιά ποσότητα $w_i(\underline{a}_i'\underline{x}-b_i)$ που ερμηνεύεται ως η ποινή για την περίπτωση που παραβιάζεται ο αρχικός περιορισμός, όταν δηλαδή $\underline{a}_i'\underline{x}-b_i \geq 0$

Η μεταβλητή w_i ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange του περιορισμού-i και παριστάνει την ποινή ανά μονάδα παραβίασης του περιορισμού.

(Σημείωση: Η παραπάνω ερμηνεία της Lagrangean δίνεται κυρίως για να δικαιολογηθεί διαισθητικά ο ορισμός. Η μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί θα μπορούσε να γίνει και χωρίς να συζητήσουμε τί σημαίνει η συνάρτηση L).

Ορίζουμε τώρα ένα νέο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$z_L(\underline{w}) = \max_{\text{υ.π. } \underline{x}\geq 0} L(\underline{x},\underline{w}) \tag{3.6}$$

Λήμμα 3.1 $\quad z_L(\underline{w}) \geq z_p \quad \forall\ \underline{w}\geq 0.$

Απόδειξη $\quad z_L(\underline{w}) = \max\limits_{\underline{x}\in\mathbb{R}^n}\left\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x}\geq 0\right\}$

$$\geq \max_{\underline{x}}\left\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x}\geq 0,\ A\underline{x}\leq \underline{b}\right\}$$

επειδή στο δεύτερο πρόβλημα η εφικτή περιοχή είναι υποσύνολο αυτής στο πρώτο

Όμως αν $\underline{w}\geq 0$ και $A\underline{x}\leq\underline{b}$, τότε $\underline{w}'(\underline{b}-A\underline{x})\geq 0$

και επομένως $L(\underline{x},\underline{w})\geq \underline{c}'\cdot\underline{x} \quad \forall\ \underline{x},\underline{w} : A\underline{x}\leq\underline{b},\ \underline{w}\geq 0$

$$\max\{L(\underline{x},\underline{w}) : \underline{x}\geq 0,\ A\underline{x}\leq b\} \geq \max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x}\geq 0,\ A\underline{x}\leq \underline{b}\} = z_p$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει

$z_L(\underline{w}) \geq z_p \quad \forall\ \underline{w}\geq 0$ ■

Το Λήμμα 3.1 δείχνει ότι το πρόβλημα (3.6) έχει μεγαλύτερη βέλτιστη τιμή από το αρχικό, επειδή αφενός έχει περισσότερες εφικτές λύσεις και αφ' ετέρου για λύσεις που είναι εφικτές και στα δύο προβλήματα το $z_L(w)$ έχει μεγαλύτερη αντικειμενική συνάρτηση. Για το λόγο αυτό το $z_L(w)$ ονομάζεται πρόβλημα Λαγκρανζιανής χαλάρωσης του z_p (Lagrangean relaxation)

Το χαλαρωμένο πρόβλημα αποτελεί άνω φράγμα για τη βέλτιστη τιμή του αρχικού, για κάθε $w\geq 0$. Επομένως έχει νόημα να ορίσουμε το $\inf\{z_L(w) : w\geq 0\}$ το οποίο επίσης θα αποτελεί άνω φράγμα για το z_p.

<u>Ορισμός 3.2</u> Το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$z_D = \inf\{z_L(\underline{w}) : \underline{w}\in\mathbb{R}^m,\ \underline{w}\geq 0\} \qquad (3.7)$$

ονομάζεται το <u>δυϊκό πρόβλημα</u> (dual problem) του προβλήματος z_p

Από το Λήμμα 3.1 προκύπτει άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα που είναι γνωστό ως <u>ασθενές θεώρημα δυϊκότητας</u> (weak duality theorem)

Θεώρημα 3.1 : $z_P \le z_D$

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα $z_L(\underline{w})$ που αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του z_D. Το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$z_L(\underline{w}) = \underline{w}'\underline{b} + f_L(\underline{w}),$$

όπου

$$f_L(\underline{w}) = \max_{\text{υ.π. } \underline{x} \ge 0} (\underline{c}' - \underline{w}'A)\,\underline{x} = \max \sum_{j=1}^{n} (c_j - \underline{w}'\underline{A}_j)\, x_j$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n$$

Το $f_L(\underline{w})$ είναι ένα τετριμμένο π.γ.π. με μόνο περιορισμούς μη αρνητικότητας. Επομένως θα είναι μη φραγμένο αν έστω και ένας συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αυστηρά θετικός. Συγκεκριμένα είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$f_L(\underline{w}) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \underline{c}' - \underline{w}'A \le 0 \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

επομένως

$$z_L(\underline{w}) = \begin{cases} \underline{w}'\underline{b}, & \text{αν } \underline{w}'A \ge \underline{c}' \\ +\infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επειδή το δυϊκό πρόβλημα z_D απαιτεί ελαχιστοποίηση του $z_L(\underline{w})$, αρκεί να περιοριστούμε σε τιμές του $\underline{w}$ για τις οποίες $z_L(\underline{w}) < \infty$, δηλαδή σε τιμές που ικανοποιούν $\underline{w}'A \ge \underline{c}'$. Συνεπώς το πρόβλημα z_D γράφεται

$$z_D = \inf\{\underline{w}'\underline{b} : \underline{w}'A \geq \underline{c}', \underline{w} \geq 0\}$$
$$= \inf\{\underline{b}'\underline{w} : A'\underline{w} \geq \underline{c}, \underline{w} \geq 0\}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το δυικό πρόβλημα είναι στην πραγματικότητα και αυτό ένα Π.Γ.Π. και μάλιστα σε HK-min μορφή:

$$z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$$
$$\text{υ.π. } A'\underline{w} \geq C$$
$$\underline{w} \geq 0$$

Σύμφωνα με τον προηγούμενο συμβολισμό, πρόκειται για το Π.Γ.Π.

$$D = HK(0, A', \underline{c}, \underline{b}) \qquad (3.8)$$

Μπορούμε τώρα εύκολα να δούμε ότι το δυικό του D είναι το αρχικό πρόβλημα P. Πραγματικά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\min_x f = -\max_x(-f)$ και $A'\underline{w} \geq \underline{c} \Leftrightarrow -A'\underline{w} \leq -\underline{c}$, το D γράφεται ως πρόβλημα HK-max ως εξής:

$$D = -HK(1, -A', -\underline{c}, -\underline{b})$$

και επομένως το δυικό του είναι το

$$\tilde{D} = -HK(0, (-A')', -b, -c) = HK(1, A, b, c) = P.$$

Επομένως μπορούμε να αναφερόμαστε σε ζεύγη Π.Γ.Π. από τα οποία το ένα είναι το δυικό του άλλου. Το P αναφέρεται ως <u>πρωτεύον</u> και το D ως <u>δυικό</u>

(δεν έχει σημασία ποιό είναι ποιό — αυτό που τα διακρίνει είναι το max ή min).

Επίσης, όπως γνωρίζουμε, ένα π.γ.π. σε γενική μορφή μπορεί πρώτα να μετατραπεί σε ΗΚ μορφή και μετά να σχηματιστεί το δυϊκό του. Μπορεί επίσης να σχηματιστεί το δυϊκό άμεσα χωρίς την ενδιάμεση μετατροπή χρησιμοποιώντας τούς γνωστούς κανόνες (βλ. π.χ [1]), που παρουσιάζονται συνοπτικά παρακάτω για λόγους πληρότητας:

Πρωτεύον	max	min	Δυϊκό
	$\leq b_i$	≥ 0	
Περιορισμοί	$\geq b_i$	≤ 0	Μεταβλητές
	$= b_i$	$\in \mathbb{R}$	
	≥ 0	$\geq c_j$	
Μεταβλητές	≤ 0	$\leq c_j$	Περιορισμοί
	$\in \mathbb{R}$	$= c_j$	

Πίνακας 3.1 Κανόνες μετασχηματισμού πρωτεύοντος-δυϊκού

Βλέπουμε από τα παραπάνω ότι σε ένα ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού π.γ.π δεν έχει σημασία ποιο θεωρούμε πρωτεύον και ποιο δυϊκό, καθώς υπάρχει πλήρης συμμετρία.
Για λόγους συντομίας στην επόμενη συζήτηση θα θεωρούμε ως πρωτεύον το πρόβλημα ΗΚ-max. Όμως όλα τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε έχουν αντίστοιχη έκφραση αν ως πρωτεύον θεωρήσουμε το ΗΚ-min.
Επισημαίνουμε όμως ότι στο Θεώρημα 2.1, το πρόβλημα ΗΚ-max είναι άνω φραγμένο από το ΗΚ-min.

3.3. ΤΟ ΙΣΧΥΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το πιο σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρίας δυικότητας, που επεκτείνει τη συμμετρία μεταξύ πρωτεύοντος-δυικού και στις βέλτιστες λύσεις των δυο προβλημάτων. Πρώτα παρουσιάζουμε δύο βοηθητικά λήμματα (θα μπορούσαμε να τα θεωρήσουμε πορίσματα του Θεωρήματος 3.1). Η απόδειξη και των δύο είναι άμεση και παραλείπεται.

Λήμμα 3.2 Αν $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των προβλημάτων P, D αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\underline{c}'\underline{x} \leq z_P \leq z_D \leq \underline{b}'\underline{w} \qquad (3.9)$$

Λήμμα 3.3 Αν $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των προβλημάτων P, D αντίστοιχα, και ισχύει $\underline{c}'\underline{x} = \underline{b}'\underline{w}$, τότε οι $\underline{x}$, $\underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις των P, D, αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα, που αναφέρεται ως το ισχυρό θεώρημα δυικότητας:

Θεώρημα 3.2. Αν ένα π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση, τότε και το δυικό του έχει βέλτιστη λύση και οι αντικειμενικές συναρτήσεις έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή $z_P = z_D$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα P έχει βέλτιστη λύση. Έστω $\underline{x}$ μια βέλτιστη ΒΕΛ με βασικό πίνακα B. Τότε όπως έχουμε δει στο κεφ. 2, ισχύει κατ' αρχήν

$$\underline{x} = B^{-1}\underline{b}$$

Επίσης, το κριτήριο βελτιστότητας είναι: $\bar{c}_j \leq 0$, $j=1,\ldots,n$, όπου $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j$, είναι το ελαττωμένο κόστος της μεταβλητής x_j.

Τα παραπάνω ισχύουν με την υπόθεση ότι το πρόβλημα P είναι σε κανονική μορφή:

$$P: \quad z_P = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

Το δυϊκό του P εκφράζεται τότε ως:

$$D: \quad z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$$
$$A'\underline{w} \geq \underline{c}$$
$$\underline{w} \in \mathbb{R}^m$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το διάνυσμα $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$.
Από τη συνθήκη βελτιστότητας του P προκύπτει:

$$c_j - \underline{w}'\underline{A}_j \leq 0 \quad \forall j=1,\ldots,n \Rightarrow \underline{c}' - \underline{w}'A \leq 0 \Rightarrow A'\underline{w} \geq \underline{c}$$

δηλαδή το $\underline{w}$ είναι εφικτή λύση του D. Επίσης

$\underline{b}'\underline{w} = \underline{w}'\underline{b} = \underline{c}_B' B^{-1} \underline{b} = \underline{c}_B' \cdot \underline{x} = z_P$. Επομένως

τα $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των P, D αντίστοιχα και $\underline{c}'\underline{x} = \underline{w}'\underline{b}$ άρα, από το Λήμμα 3.3, και το $\underline{w}$ είναι βέλτιστη λύση του D, δηλαδή

$$\underline{c}'\underline{x} = z_P = z_D = \underline{w}'\underline{b} \qquad \blacksquare$$

Το ισχυρό θεώρημα δυϊκότητας δίνει τη σχέση μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των προβλημάτων P κ' D, αν τουλάχιστον ένα έχει βέλτιστη λύση. Πρέπει όμως να δούμε τι γίνεται και στην περίπτωση που κάποιο από τα προβλήματα δεν έχει βέλτιστη λύση, δηλαδή είναι είτε μη φραγμένο ή αδύνατο.

Η πρώτη περίπτωση αναλύεται εύκολα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1:

Πόρισμα 3.1 Αν ένα από τα προβλήματα P, D είναι μη φραγμένο τότε το δυϊκό του είναι αδύνατο.

Απόδειξη Έστω ότι το P είναι μη φραγμένο, δηλαδή $z_P = +\infty$. Τότε από το Θεώρημα 3.1 $z_D = +\infty$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το πρόβλημα D έχει τουλάχιστον μια εφικτή λύση. Σ' αυτή την περίπτωση θα ισχύει $z_D \leq \underline{w}\underline{b} < \infty$, που είναι άτοπο. Επομένως το πρόβλημα D δεν έχει εφικτές λύσεις. Η απόδειξη για την περίπτωση που το D είναι μη φραγμένο είναι εντελώς ανάλογη. ∎

Τέλος στην περίπτωση που κάποιο από τα P, D είναι αδύνατο από το Θεώρημα 3.2 προκύπτει ότι το δυϊκό του θα είναι είτε μη φραγμένο ή αδύνατο. Μπορεί κανείς να βρεί παραδείγματα και για τις δύο αυτές υποπεριπτώσεις, επομένως δεν υπάρχει γενικός κανόνας.

3.4 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε ένα ακόμη βασικό αποτέλεσμα που αφορά τη συσχέτιση των βέλτιστων λύσεων ενός ζεύγους πρωτεύοντος-δυϊκού. Ορίζουμε πρώτα τις εξής ποσότητες

$$u_i = w_i(b_i - \underline{a}_i' \underline{x}) \quad , i=1,\dots,m \tag{3.10}$$

$$v_j = (\underline{w}'\underline{A}_j - c_j)x_j \quad , j=1,\dots,n \tag{3.11}$$

Από τους ορισμούς των προβλημάτων P, D έχουμε ότι αν $\underline{x}, \underline{w}$ είναι εφικτές λύσεις των P και D αντίστοιχα, τότε $u_i \geq 0$ $i=1,\dots,m$ και $v_j \geq 0$, $j=1,\dots,n$.

Επίσης:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \underline{w}'(\underline{b} - A\underline{x}) = \underline{w}'\underline{b} - \underline{w}'A\underline{x}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j = (\underline{w}'A - \underline{c}')\underline{x} = \underline{w}'A\underline{x} - \underline{c}'\underline{x}$$

Επομένως

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j = \underline{w}'\underline{b} - \underline{c}'\underline{x}. \tag{3.12}$$

Εκτός από μια δεύτερη απόδειξη του ασθενούς θεωρήματος δυϊκότητας, η σχέση (3.12) έχει και μια άλλη ενδιαφέρουσα συνέπεια. Ας υποθέσουμε ότι οι $\underline{x}, \underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις των P, D αντίστοιχα. Τότε από το Θεώρημα 3.2 προκύπτει $\underline{w}'\underline{b} = \underline{c}'\underline{x}$, και επομένως από την (3.12):

$$u_i = 0, \quad v_j = 0 \quad , i=1,\dots,m, \ j=1,\dots,n.$$

Τώρα προκύπτει άμεσα το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3 Έστω $\underline{x}, \underline{w}$ εφικτές λύσεις των προβλημάτων P, D αντίστοιχα. Οι $\underline{x}, \underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις για τα αντίστοιχα προβλήματα αν και μόνο αν

$$w_i (b_i - \underline{a}_i' \underline{x}) = 0 \quad , \quad i=1,\dots,m \tag{3.13}$$

$$(\underline{w}' A_j - c_j) x_j = 0 \quad , \quad j=1,\dots,n. \tag{3.14}$$

Το Θεώρημα 3.3 αναφέρεται ως Θεώρημα συμπληρωματικότητας (complementary slackness theorem)

Μια προφανής χρήση του είναι για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του ενός προβλήματος χωρίς τη χρήση της μεθόδου Simplex, όταν είναι γνωστή η λύση του άλλου προβλήματος.
Αυτό είναι πάντα δυνατό όταν η βέλτιστη λύση είναι μη εκφυλισμένη. Για να το δούμε αυτό:

Έστω ότι το πρόβλημα P σε κανονική μορφή γράφεται

$$\begin{aligned} z_p = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\ & A\underline{x} + \underline{y} = \underline{b} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{y} \in \mathbb{R}^m,\ \text{rank}(A) = m \\ & \underline{x}, \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

και έχει βέλτιστη ΒΕΛ $(\underline{x}^*, \underline{y}^*)$ που είναι μη εκφυλισμένη. Αυτό σημαίνει ότι από τις $m+n$ συνιστώσες του διανύσματος $\begin{pmatrix} \underline{x}^* \\ \underline{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$, ακριβώς m είναι αυστηρά θετικές.

Έστω ότι από αυτές οι m_1 αντιστοιχούν σε μεταβλητές x_j και οι m_2 σε μεταβλητές y_i, με $m_1 + m_2 = m$.

Βλέπουμε ότι για $x_j > 0$ από την (3.14):

$$\underline{w}'\underline{A}_j - c_j = 0 \Rightarrow \underline{w}'\underline{A}_j = c_j \qquad (m_1 \text{ εξισώσεις})$$

Επίσης για $\underline{y}_i > 0 \Rightarrow b_i - \underline{a}_i'\underline{x} > 0$, επομένως από την (3.13)

$$w_i = 0. \qquad (m_2 \text{ εξισώσεις})$$

Συνεπώς το διάνυσμα $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί m γραμμικές εξισώσεις που είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

<u>Παρατηρήσεις</u> ① Το παραπάνω αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό του $\underline{w}$ αν γνωρίζουμε τη βέλτιστη λύση $\underline{x}$ του P είναι ισοδύναμο με την απόδειξη του ισχυρού θεωρήματος δυϊκότητας, στην οποία είδαμε ότι $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$, όπου B είναι ο βέλτιστος βασικός πίνακας.

② Αν η $\underline{x}$ είναι εκφυλισμένη ΒΕΛ, τότε οι εξισώσεις που προκύπτουν από το θεώρημα συμπληρωματικότητας είναι λιγότερες από m και το διάνυσμα $\underline{w}$ των δυϊκών μεταβλητών δεν προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

3.5. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΔΥΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Σ' αυτή την ενότητα θα θεωρήσουμε το πρωτεύον ως πρόβλημα παραγωγής κάτω από περιορισμένους πόρους και θα δώσουμε μια ερμηνεία του δυικού προβλήματος ως προσδιορισμού βέλτιστης προσφοράς για την αγορά των πόρων. Επίσης θα αποδείξουμε μια μαθηματική ιδιότητα των δυικών μεταβλητών που βοηθά στην βαθύτερη κατανόηση αυτής της ερμηνείας, όπως επίσης και της σχέσης των δύο προβλημάτων.

Έστω το πρωτεύον πρόβλημα P : $\max\{\underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} \le \underline{b} , \underline{x} \ge 0\}$

Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\underline{x}$ αντιστοιχεί στις ποσότητες παραγωγής n προϊόντων, χρησιμοποιώντας m πόρους/αγαθά (π.χ. εργασία, πρώτες ύλες, κεφάλαιο κλπ.)

Το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A συμβολίζει την ποσότητα του πόρου i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος j, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$. Επίσης η παράμετρος b_i παριστάνει τη διαθέσιμη ποσότητα του πόρου i, $i=1,\dots,m$.

Για το παράδειγμα αυτό, το δυϊκό πρόβλημα D:

$z_D = \min\{\underline{b}'\underline{w} ; A'\underline{w} \ge \underline{c} , \underline{w} \ge 0\}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Έστω ότι κάποιος εξωτερικός αγοραστής θέλει να κάνει μια προσφορά για να αγοράσει όλες τις διαθέσιμες ποσότητες πόρων από τον κάτοχο της παραπάνω παραγωγικής διαδικασίας. Ο αγοραστής πρέπει να προσδιορίσει τις μοναδιαίες τιμές w_i, $i=1,\dots,m$ που είναι διατεθειμένος να πληρώσει. Αυτές οι τιμές, εκτός του ότι είναι μη αρνητικές πρέπει να ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Οι περιορισμοί αντανακλούν την απαίτηση να γίνουν δεκτές από τον ιδιοκτήτη των πόρων. Συγκεκριμένα, ας θεωρή-

-τουμε το προϊόν j: Ο ιδιοκτήτης των πόρων μπορεί να χρησιμοποιήσει ποσότητες a_{ij}, $i=1,\dots,m$ από τους πόρους για να παράγει μια μονάδα του προϊόντος j, η οποία θα του αποφέρει κέρδος c_j.
Για να δεχθεί να πουλήσει τους πόρους του θα πρέπει οι τιμές που του προσφέρονται να είναι τέτοιες ώστε από την πώληση των ιδίων ποσοτήτων όλων παραπάνω να έχει κέρδος τουλάχιστον ίσο με c_j, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij} \geq c_j .$$

Επειδή ο ιδιοκτήτης μπορεί να παράγει οποιοδήποτε από τα n προϊόντα, οι τιμές πρέπει να είναι συμφέρουσες, δηλαδή ο παραπάνω περιορισμός πρέπει να ισχύει, για όλα τα $j=1,\dots,n$.

Τώρα ο υποψήφιος αγοραστής γνωρίζει ότι για να μπορέσει να αποκτήσει τους παραπάνω πόρους θα πρέπει οι τιμές που θα προσφέρει να ικανοποιούν τους παραπάνω περιορισμούς. Από την άλλη πλευρά ο ίδιος θέλει να πληρώσει το ελάχιστο δυνατό συνολικό ποσό. Επομένως πρέπει να λύσει το παρακάτω πρόβλημα γ.π.:

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geq c_j \quad , \; j=1,\dots,n$$

$$w_i \geq 0 \quad , \quad i=1,\dots,m$$

που είναι ακριβώς το δυϊκό πρόβλημα D.

Έχουμε επομένως μια ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος, σχετική με αυτή του πρωτεύοντος. Πρέπει ωστόσο να παρατηρήσουμε τα εξής: Κατά πρώτον υποθέσαμε ότι ο αγοραστής θα κάνει την προσφορά για τις συνολικές ποσότητες όλων των πόρων. Με άλλα λόγια μπορεί οι δυϊκές μεταβλητές να δείχνουν τη μοναδιαία προσφερόμενη τιμή για κάθε πόρο, όμως ισχύουν μόνο αν ο αγοραστής αποφασίσει να πουλήσει όλες τις διαθέσιμες ποσότητες πόρων που διαθέτει. Υποθέτουμε επίσης ότι ο αγοραστής δεν έχει άλλη ωφέλεια από τους πόρους αυτούς εκτός από το κέρδος που λαμβάνει παράγοντας τα προϊόντα 1,..,n. Με άλλα λόγια αν μετά τις βέλτιστες ποσότητες παραγωγής μένουν κάποιες ποσότητες πόρων αχρησιμοποίητες αυτές έχουν μηδενική αξία για τον ιδιοκτήτη.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η ερμηνεία του δυϊκού που δόθηκε παραπάνω βρέθηκε σε συνάρτηση με την ερμηνεία του πρωτεύοντος, και δεν φιλοδοξεί να είναι γενικός κανόνας. Με άλλα λόγια η παραπάνω συζήτηση πρέπει να θεωρηθεί μάλλον ως παράδειγμα για τον τρόπο σκέψης όταν θέλουμε να συσχετίσουμε το δυϊκό πρόβλημα με την εφαρμογή από την οποία προέρχεται το πρωτεύον. Σε διαφορετικές εφαρμογές η ερμηνεία του δυϊκού θα είναι φυσικά διαφορετική, και μπορεί να μη σχετίζεται με το προηγούμενο παράδειγμα.

Από την άλλη πλευρά η ιδιότητα που θα αποδείξουμε αμέσως μετά είναι καθαρά μαθηματική, επομένως είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη ερμηνεία που έχουμε ενδεχομένως υιοθετήσει. Είναι όμως από μόνη της ενδιαφέρουσα γιατί μπορεί να δώσει ενδιαφέρουσες πληροφορίες σχετικά με την εφαρμογή από την οποία προέρχεται το Π.Γ.Π.

Για τη συζήτηση παρακάτω θα υποθέσουμε (φυσικά χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το πρωτεύον Π.γ.Π είναι σε κανονική μορφή:

$$P: \quad z_p = \max\left\{ \underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0 \right\}.$$

Έστω $\underline{x}$ μια βέλτιστη ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, και ας υποθέσουμε ότι η $\underline{x}$ είναι μη εκφυλισμένη. Επομένως το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών είναι $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} > 0$.

Έστω τώρα ότι το διάνυσμα $\underline{b}$ μεταβάλλεται σε $\underline{b}+\underline{\Delta}$ όπου $\underline{\Delta}$ είναι μια διαταραχή αρκετά μικρή ώστε το διάνυσμα $B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})$ να παραμένει θετικό (δείξτε ότι αν $B^{-1}\underline{b}>0$, $\exists$ $\Delta>0$ τέτοιο ώστε $B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})>0$). Αυτό σημαίνει ότι η λύση $\underline{x}^{(\Delta)}$, όπου $\underline{x}_B^{(\Delta)} = B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta})$ και $x_j^{(\Delta)}=0$ $\forall\ j \neq B(1), \dots, B(m)$ είναι εφικτή για το πρόβλημα $P^{(\Delta)}$: $z_p^{(\Delta)} = \max\left\{ \underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}+\underline{\Delta} \right\}$.

Από την άλλη πλευρά, η λύση $\underline{x}$ είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα, επομένως $\bar{c}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j \leq 0$ $\forall j$. Παρατηρούμε ότι τα ελαττωμένα κόστη $\bar{c}_j$ είναι ανεξάρτητα του $\underline{\Delta}$, επομένως θα είναι τα ίδια και για τη λύση $\underline{x}^{(\Delta)}$ του προβλήματος $P^{(\Delta)}$, αφού αυτή αντιστοιχεί στον ίδιο βασικό πίνακα B. Επομένως αφού η $x^{(\Delta)}$ είναι εφικτή για το $P^{(\Delta)}$ και ισχύει $\bar{c}_j \leq 0$ $\forall j$, προκύπτει ότι είναι και βέλτιστη. Συνεπώς έχουμε:

$$Z_p = z(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c}) = \underline{c}_B' \cdot B^{-1} \underline{b}$$

$$Z_p^{(\Delta)} = z(A, \underline{b}+\underline{\Delta}, \underline{c}) = \underline{c}_B' B^{-1} (\underline{b}+\underline{\Delta}) = Z_p(A, \underline{b}, \underline{c}) + \underline{c}_B' B^{-1} \underline{\Delta}$$

Όμως, όπως έχουμε δει στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 το διάνυσμα $\underline{c}_B' B^{-1}$ αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση $\underline{w}$ δυϊκού προβλήματος, επομένως

$$Z_p(A, \underline{b}+\underline{\Delta}, \underline{c}) = Z_p(A, \underline{b}, \underline{c}) + \underline{w}' \cdot \underline{\Delta} . \qquad (3.15)$$

Από την (3.15) προκύπτει ότι μια μικρή μεταβολή κατά $\underline{\Delta}$ διανύσματος $\underline{b}$ συνεπάγεται μεταβολή της βέλτιστης τιμής κατά $\underline{w}' \underline{\Delta}$. Η παραπάνω συζήτηση μπορεί να διατυπωθεί αυστηρά σύμφωνα με την παρακάτω Πρόταση (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση)

<u>Πρόταση 3.1</u> Έστω ότι το πρόβλημα $P: z_p(\underline{A}, \underline{b}, \underline{c})$ (σε κανονική μορφή) έχει μη εκφυλισμένη βέλτιστη ΒΕΛ $\underline{x}$ με βασικό πίνακα B, και βέλτιστο διάνυσμα δυϊκών μεταβλητών $\underline{w}' = \underline{c}_B' B^{-1}$. Τότε ισχύει

$$\frac{\partial z_p}{\partial b_i} = w_i , \quad i = 1, \dots, m \qquad (3.16)$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.1, η δυϊκή μεταβλητή w_i (στη βέλτιστη λύση) εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της βέλτιστης τιμής για μικρές μεταβολές της παραμέτρου b_i.

Η ιδιότητα αυτή είναι ενδιαφέρουσα από μαθηματική άποψη, καθώς δίνει μια μαθηματική ερμηνεία των δυϊκών μεταβλητών σε σχέση με το πρωτεύον πρόβλημα. Επίσης, ανάλογα με εφαρμογή από την οποία προέρχεται το πρωτεύον, μπορεί να έχει και αντίστοιχη οικονομική ερμηνεία.

Για παράδειγμα αν το P έχει την ερμηνεία του προβλήματος παραγωγής με περιορισμένες ποσότητες πόρων πού είδαμε προηγουμένως, τότε, στη βέλτιστη λύση, η δυϊκή μεταβλητή w_i δίνει το ρυθμό μεταβολής του βέλτιστου κέρδους του παραγωγού αν μεταβληθεί η διαθέσιμη ποσότητα b_i του πόρου i κατά μια αρκετά μικρή ποσότητα. Δίνει επομένως την μοναδιαία τιμή στην οποία είναι διατεθειμένος ο παραγωγός να αγοράσει επιπλέον (μικρές) ποσότητες του πόρου i, χωρίς να μεταβληθούν οι υπόλοιπες ποσότητες, ή ισοδύναμα την τιμή ανά μονάδα στην οποία διατεθειμένος να πουλήσει μικρή ποσότητα από αυτή πού έχει ήδη στην κατοχή του.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ερμηνεία του w_i σχετίζεται σε κάποιο βαθμό με εκείνη που δώσαμε κατά το σχηματισμό του δυϊκού προβλήματος. Η διαφορά εδώ είναι ότι η w_i στη βέλτιστη λύση δίνει την δίκαιη τιμή του πόρου i, δηλαδή την αξία που έχει μια οριακή μονάδα του πόρου i για τον παραγωγό, δεδομένου ότι οι υπόλοιπες ποσότητες είτε παραμένουν σταθερές ή μεταβάλλονται κατά επίσης οριακό τρόπο.

Παρατηρήσεις ① Η Πρόταση 3.1 ισχύει ανεξάρτητα από οικονομικές ερμηνείες, και υποθέτει μόνο ότι η βέλτιστη λύση είναι μη εκφυλισμένη.
② Λόγω της Πρότασης 2.1, η δυϊκή μεταβλητή w_i στη βέλτιστη λύση αναφέρεται συχνά ως

σκιώδης τιμή (shadow price) του περιορισμού - i.

(3) Είναι ενδιαφέρον να δούμε ότι το θεώρημα συμπληρωματικότητας και η Πρόταση 3.1 είναι συμβατά ως προς τη μαθηματική ερμηνεία των w_i.
Πραγματικά αν για ένα περιορισμό της μορφής $\underline{a}_i' \underline{x} \leq b_i$ η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι τέτοια ώστε $\underline{a}_i' \underline{x} < b_i$, τότε από το Θεώρημα 3.3 προκύπτει ότι $w_i = 0$, επομένως από την Πρόταση 3.1: $\frac{\partial z_P}{\partial b_i} = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η βέλτιστη τιμή z_p δε μεταβάλλεται για μικρές διαταραχές του δεξιού μέλους b_i, πράγμα αναμενόμενο δεδομένου ότι ο περιορισμός δεν είναι ενεργός.

3.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.1 Για το παρακάτω π.γ.π.

$$(P): \quad z_p = \max \; x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5$$
$$x_2 + 3x_3 \ge 3$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$x_1 \le 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0$$

(α) Σχηματίστε το δυϊκό (D) απευθείας χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες δημιουργίας του δυϊκού.

(β) Μετασχηματίστε το πρωτεύον (P) σε ΗΚ-max μορφή (P_{HK}) και σχηματίστε το δυϊκό του P_{HK}, έστω D_{HK}, σε μορφή ΗΚ-min.

(γ) Δείξτε ότι τα D, D_{HK} είναι ισοδύναμα (π.χ. δείχνοντας ότι η ΗΚmin μορφή του D είναι το P_{HK}.

Άσκηση 3.2 Έστω ότι το πρόβλημα (P) είναι σε ΗΚ-min μορφή:

$$P: \quad z_p = \min c'x$$
$$A\underline{x} \ge \underline{b}$$
$$\underline{x} \ge 0.$$

Δείξτε πώς αλλάζει η ανάλυση της ενότητας 3.2 (ορισμός Lagrangean, προβλήματος $z_L(\omega)$ κλπ) ώστε να προκύψει ο ορισμός του δυϊκού προβλήματος του P

Άσκηση 3.3 Έστω A ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$. Θεωρήστε το Π.Γ.Π.

$$\max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} \leq \underline{c}$$
$$\underline{x} \geq 0.$$

Δείξτε ότι αν ένα διάνυσμα $\underline{x}^*$ ικανοποιεί $A\underline{x}^* = \underline{c}$ και $\underline{x}^* \geq 0$, τότε το $\underline{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του Π.Γ.Π.

Άσκηση 3.4 (Πρόβλημα φόρτωσης σάκκου – knapsack problem)

Πρόκειται για την απλούστερη εκδοχή μιας μεγάλης κατηγορίας προβλημάτων βελτιστοποίησης, που είναι γνωστά με τον όρο knapsack problems.

Έστω ότι πρέπει να φορτώσουμε ένα σάκκο με ποσότητες από n διαφορετικά υλικά. Το βάρος ανά μονάδα του υλικού j είναι ίσο με a_j, $j=1,\dots,n$, (υποθέτουμε $a_j \geq 0$). Η αξία ανά μονάδα του υλικού j είναι ίση με c_j, $j=1,\dots,n$ (το c_j μπορεί να έχει οποιοδήποτε πρόσημο).

Το συνολικό βάρος του σάκκου δεν μπορεί να υπερβαίνει μια δοσμένη ποσότητα b. Ζητείται να βρεθούν οι ποσότητες από κάθε υλικό που θα φορτωθούν έτσι ώστε η συνολική αξία του σάκκου να είναι η μέγιστη δυνατή.

(a) Γράψτε ένα Π.Γ.Π. για το παραπάνω πρόβλημα, σε Κανονική Μορφή.
Δείξτε ότι το Π.Γ.Π. είναι φραγμένο, επομένως έχει βέλτιστη λύση.

(b) Βρείτε τη βέλτιστη λύση του (a) χρησιμοποιώντας τα κριτήρια βελτιστότητας του Κεφαλαίου 2.

(c) Δώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η βέλτιστη λύση μοναδική.

(d) Σχηματίστε το δυϊκό του αρχικού προβλήματος.

(e) Βρείτε τη βέλτιστη λύση του (d) χωρίς τη χρήση του θεωρήματος συμπληρωματικότητας. Αν ισχύει η συνθήκη του (c), τι σημαίνει αυτό για τη βέλτιστη λύση του δυϊκού;

(f) Δείξτε ότι οι λύσεις των δύο προβλημάτων ικανοποιούν το Θεώρημα Συμπληρωματικότητας.

Άσκηση 3.5 (Λήμμα του Farkas) Αποδείξτε το παρακάτω αποτέλεσμα: Έστω A πίνακας $m \times n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$. Τότε ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθής:

(i) $\exists\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{x} \geq 0$, $A\underline{x} = \underline{b}$

(ii) $\exists\ \underline{w} \in \mathbb{R}^m$: $\underline{w}'A \geq 0$, $\underline{w}'\underline{b} < 0$

(Υπόδειξη: Η απόδειξη (i) $\Rightarrow$ όχι (ii) είναι απλή, αρκεί να θεωρήσει κανείς το γινόμενο $\underline{w}'A\underline{x}$.
Για την απόδειξη όχι (i) $\Rightarrow$ (ii) θεωρήστε το π.γ.π.

$$\max \underline{0}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

και εφαρμόστε τη θεωρία δυϊκότητας.

Άσκηση 3.6 Θεωρήστε το παρακάτω ζεύγος πρωτεύοντος δυϊκού (rank $(A)=m$)

P: $z_P = \max \underline{c}'\underline{x}$
$A\underline{x} = \underline{b}$
$\underline{x} \geq 0$

D: $z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$
$A'\underline{w} \geq \underline{c}$
$\underline{w} \in \mathbb{R}^m$

Δείξτε ότι αν ένα πρόβλημα έχει μια εφικτή βέλτιστη λύση, τότε ισχύει το ίδιο και για το άλλο πρόβλημα.

Άσκηση 3.7 Σχηματίστε το δυϊκό του προβλήματος παραγωγής ενός προϊόντος σε πολλές περιόδους (Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.2.2). Έστω ότι το πρωτεύον πρόβλημα έχει λύση. Δώστε την οικονομική ερμηνεία των δυϊκών μεταβλητών.

Άσκηση 3.8 Επαναλάβετε την Άσκηση 3.7 για το πρόβλημα ροής ελάχιστου κόστους (Κεφ. 1, Ενότητα 1.3.2)

Άσκηση 3.9 Επαναλάβετε την Άσκηση 3.7 για το πρόβλημα προγραμματισμού εργασίας (Κεφ. 1, Ενότητα 1.4)

Άσκηση 3.10 Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κοίλης συνάρτησης και το ισοδύναμο Π.Γ.Π (Κεφ. 1, εξ. (1.11) και (1.12) αντίστοιχα)

(a) Σχηματίστε το δυϊκό πρόβλημα.

(b) Προσπαθήστε να βρείτε μια ερμηνεία του δυϊκού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΑΚΕΡΑΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις βασικές αρχές της διακριτής βελτιστοποίησης (discrete optimization). Με τον όρο αυτό εννοούμε προβλήματα βελτιστοποίησης όπου η εφικτή περιοχή είναι διακριτό (πεπερασμένο ή αριθμήσιμο) σύνολο. Τα προβλήματα διακριτής βελτιστοποίησης είναι γενικά δυσκολότερα από τα "αντίστοιχα" συνεχή προβλήματα. Αυτός βέβαια ο ισχυρισμός δεν έχει και πολύ νόημα προς το παρόν, καθώς δεν έχουμε ορίσει τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ούτε τα αντίστοιχά τους συνεχ… Επίσης υπάρχουν εξαιρέσεις και των δύο τύπων, δηλαδή πολλά διακριτά προβλήματα είναι εύκολα, ενώ πολλά συνεχή δύσκολα.

Εδώ θα εξετάσουμε μια κατηγορία προβλημάτων διακριτής βελτιστοποίησης, τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού (integer programming). Αυτά προκύπτουν από προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με κάποιες από τις μεταβλητές να περιορίζονται σε ακέραιες τιμές. Θα ορίσουμε διάφορες κατηγορίες προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού, και θα εξετάσουμε τις σχέσεις μεταξύ τους. Επίσης θα δούμε αρκετές περιπτώσεις προβλημάτων αποφάσεων που μοντελοποιούνται με τη βοήθεια ακέραιου προγραμματισμού. Τέλος θα συζητήσουμε μερικές βασικές ιδιότητες των προβλημάτων αυτού του τύπου και μια αρκετά γενική μέθοδο επίλυσης.

Το γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης που θα μελετήσουμε είναι το πρόβλημα του Μεικτού Ακέραιου Προγραμματισμού (mixed integer programming), σε συντομογραφία μ.α.π (MIP). Αυτό ορίζεται ως εξής, σε κανονική μορφή

$$z = \max \ \underline{c}'\underline{x} + \underline{h}'\underline{y}$$

$$A\underline{x} + G\underline{y} = \underline{b} \qquad (4.1)$$

$$\underline{x} \in \mathbb{Z}^n_+, \ \underline{y} \in \mathbb{R}^p_+$$

όπου ο A είναι πίνακας $m \times n$, G πίνακας $m \times p$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{h} \in \mathbb{R}^p$ και $b \in \mathbb{R}^m$.
Η (4.1) εκφράζει ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας γραμμικής συνάρτησης κάτω από ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων και περιορισμών μη αρνητικότητας, ακριβώς όπως και σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Το επιπλέον στοιχείο είναι ότι οι n από τις συνολικά $n+p$ μεταβλητές απόφασης απαιτείται να παίρνουν ακέραιες τιμές.

Πριν προχωρήσουμε σημειώνουμε ότι στη γενική μορφή του, ένα πρόβλημα μ.α.π. μπορεί να είναι min ή max, να περιέχει περιορισμούς με τη μορφή γραμμικών ανισοτήτων, ενώ κάποιες από τις μεταβλητές $\underline{x}$ ή/και $\underline{y}$ να είναι είτε μη θετικές είτε χωρίς περιορισμό ως προς το πρόσημο.
Με εντελώς ανάλογους μετασχηματισμούς όπως και για ένα π.γ.π. μπορεί κανείς να μετατρέψει ένα γενικό πρόβλημα μ.α.π. σε ένα ισοδύναμο μ.α.π. σε κανονική μορφή. Επομένως η έκφραση σε κανονική μορφή όπως στην (4.1) γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας

Από τη γενική περίπτωση ενός προβλήματος μ.α.π. μπορούμε να δούμε ότι προκύπτουν αρκετές ενδιαφέρουσες κατηγορίες προβλημάτων ως ειδικές περιπτώσεις.

(1) Αν $n=0$ τότε το πρόβλημα

$$z = \max \underline{h}'\underline{y}$$
$$G\underline{y} = \underline{b}$$
$$\underline{y} \in \mathbb{R}_+^p$$

είναι ένα πρόβλημα <u>γραμμικού προγραμματισμού</u>

(2) Αν $p=0$, το πρόβλημα

$$z = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \in \mathbb{Z}_+^n$$

είναι ένα πρόβλημα <u>καθαρού ακέραιου προγραμματισμού</u> όπου όλες οι μεταβλητές είναι περιορισμένες σε ακέραιες τιμές.

Παρατηρούμε ότι ένα γενικό πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού δεν μπορεί γενικά να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο πρόβλημα πάλι ακέραιου προγραμματισμού σε κανονική μορφή. Για παράδειγμα ένας περιορισμός της μορφής $\sqrt{2}x_1 + x_2 \leq 4$, όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως $\sqrt{2}x_1 + x_2 + x_3 = 4$, με $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$, αλλά $x_3 \in \mathbb{R}_+$. Δεν υπάρχει ισοδύναμη έκφραση ως εξίσωση με όλες τις μεταβλητές ακέραιες.

Συνήθως όμως σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού γίνεται η επιπλέον υπόθεση ότι οι πίνακες A, G και τα διανύσματα $\underline{c}, \underline{h}, \underline{b}$ αποτελούνται από ρητούς αριθμούς. Αυτή η υπόθεση ρητότητας των δεδομένων διευκολύνει σημαντικά τη θεωρητική ανάλυση, ενώ από πρακτική άποψη δεν είναι σχεδόν καθόλου περιοριστική, δεδομένου ότι στη μεγάλη πλειονότητα των εφαρμογών αυτού του τύπου όλα τα δεδομένα εκτιμούνται με πεπερασμένη ακρίβεια.

Τώρα κάτω από την υπόθεση ρητότητας είναι εύκολο να δει κανείς ότι οποιοδήποτε πρόβλημα καθαρού ακέραιου προγραμματισμού μπορεί να μετασχηματιστεί σε ισοδύναμο πρόβλημα επίσης καθαρού ακέραιου προγραμματισμού σε κανονική μορφή. Επομένως και σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων η έκφραση σε κανονική μορφή γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας (Η απόδειξη του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Η βασική ιδέα είναι ότι ένας περιορισμός της μορφής π.χ.

$\frac{1}{2}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \le 2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα

$3x_1 + 8x_2 \le 12$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$, και αυτός με τη σειρά του ως

$3x_1 + 8x_2 + x_3 = 12$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$, που είναι σε κανονική μορφή με ακέραιες μεταβλητές).

(3) Ένα πρόβλημα της μορφής

$$z = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

ονομάζεται πρόβλημα <u>0-1 προγραμματισμού</u> (zero-one or binary programming). Θέτοντας $\mathbb{B} = \{0,1\}$

το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα

$$z = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \in \mathbb{B}^n.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ένα πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού είναι ειδική περίπτωση του ακέραιου προγραμματισμού. Πραγματικά ο περιορισμός $x_j \in \{0,1\}$ είναι ισοδύναμος με $x_j \le 1$ και $x_j \in \mathbb{Z}_+$, από τους οποίους ο πρώτος μπορεί να συμπεριληφθεί στους περιορισμούς $A\underline{x} = \underline{b}$.

Ο λόγος που τα προβλήματα 0-1 προγραμματισμού αξίζουν ειδική μνεία είναι ότι οι δυαδικές μεταβλητές $x_j \in \{0,1\}$ είναι εξαιρετικά χρήσιμες για τη μοντελοποίηση μιας μεγάλης κατηγορίας εφαρμογών ως προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Πρόκειται για εφαρμογές όπου πρέπει να ληφθούν αποφάσεις διακριτής μορφής, όχι απαραίτητα όλες ποσοτικές. Λεπτομέρειες και παραδείγματα τέτοιων μοντέλων θα εξετάσουμε στην επόμενη ενότητα.

Σημειώνουμε επίσης ότι μπορεί κανείς να ορίσει προβλήματα της μορφής (4.1) όπου κάποιες από τις μεταβλητές είναι ακέραιες, κάποιες 0-1, και κάποιες πραγματικές. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι και αυτά τα "γενικότερα" προβλήματα εμπίπτουν στην κατηγορία των προβλημάτων μ.α.π. της μορφής (4.1).

Τέλος μπορεί κανείς να δείξει (βλ. Άσκηση **) ότι αν η εφικτή περιοχή ενός προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού είναι φραγμένο σύνολο, τότε το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού. Επομένως τα προβλήματα 0-1 προγραμματισμού είναι στην πραγματικότητα αρκετά γενικότερα απ' ότι φαίνεται με την πρώτη ματιά.

4.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές κατηγορίες εφαρμογών που μοντελοποιούνται ως προβλήματα μεικτού ακέραιου προγραμματισμού, και ιδιαίτερα χρησιμοποιώντας δυαδικές μεταβλητές.

Πριν εξετάσουμε συγκεκριμένα προβλήματα, αναφέρουμε ότι πολλά προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (όπως αυτά που είδαμε στο Κεφάλαιο 1) μετατρέπονται αυτόματα σε προβλήματα μ.α.π. αν από τη φύση της εφαρμογής κάποιες από τις μεταβλητές περιορίζονται σε ακέραιες τιμές. Για παράδειγμα προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής είναι προβλήματα μ.α.π. αν κάποια προϊόντα είτε είναι από τη φύση τους διακριτά (π.χ. αυτοκίνητα) είτε απαιτείται η παραγωγή σε διακριτές ποσότητες (π.χ. ακέραιος αριθμός βαρελιών κρασιού).

Αυτές οι περιπτώσεις δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσον αφορά τη μοντελοποίηση, καθώς δεν απαιτούν νέες ιδέες σε σχέση με τα αντίστοιχα π.γ.π. Εδώ θα ασχοληθούμε με κατηγορίες μοντέλων που επεκτείνουν ουσιαστικά το σύνολο των εφαρμογών.

Η βασική ιδέα στα προβλήματα που θα εξετάσουμε είναι η χρήση δυαδικών μεταβλητών απόφασης για να εκφράσουμε διχοτομικές αποφάσεις του τύπου ναι ή όχι.
Έτσι μια δυαδική μεταβλητή $x_j \in \{0,1\}$ θα χρησιμοποιείται για να εκφράσει την επιλογή μιας συγκεκριμένης απόφασης-j:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{αν επιλέξουμε την απόφαση} - j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

ή ισοδύναμα ως δείκτρια μεταβλητή της απόφασης-j

$$x_j = 1(\text{απόφαση} - j) \qquad (4.2)$$

Με βάση αυτό τον ορισμό μπορούμε να δούμε κάποιους γενικούς κανόνες μοντελοποίησης με δυαδικές μεταβλητές, που είναι εφαρμόσιμοι σε πολλά διαφορετικά προβλήματα.

Έστω ένα σύνολο δυνατών αποφάσεων $1, \dots, n$, κάθε μια από τις οποίες μπορεί να ενεργοποιηθεί ή όχι (δυαδικής μορφής). Ορίζοντας μεταβλητές x_j, $j=1,\dots,n$ όπως στην (4.2) προκύπτουν εύκολα τα παρακάτω:

(i) Η έκφραση $\sum_{j=1}^{n} x_j$ δείχνει τον αριθμό των αποφάσεων που ενεργοποιούνται. Αυτό επιτρέπει τη μοντελοποίηση περιορισμών της μορφής "το πολύ k-αποφάσεις μπορούν να ενεργοποιηθούν":

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = k,$$

κ.λ.π.

(ii) Ένας περιορισμός της μορφής

$$x_i \leq x_j$$

εκφράζει το γεγονός ότι η απόφαση-i συνεπάγεται την j, δηλαδή μπορεί να ενεργοποιηθεί μόνο αν ενεργοποιηθεί και η j ταυτόχρονα.

(Φυσικά αν η j είναι ικανή και αναγκαία για την i, αυτό εκφράζεται με τον περιορισμό $x_i = x_j$, οπότε μια από τις δύο ισοδύναμες αποφάσεις/μεταβλητές θα μπορούσε να απαλειφθεί.)

(iii) Έστω ότι χρειάζεται να ορίσουμε μια μεταβλητή για το γεγονός ότι οι αποφάσεις i και j επιλέγονται μαζί:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \text{ και } j \text{ λαμβάνονται ταυτόχρονα} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας ιδέες από την άλγεβρα Boole θα μπορούσαμε να ορίσουμε την $x_{ij} = x_i x_j$. Παρ' όλο που αυτό είναι μαθηματικά σωστό, δεν είναι το κατάλληλο μοντέλο, καθώς η έκφραση $x_i x_j$ <u>δεν είναι γραμμική</u>. Μια ισοδύναμη γραμμική μοντελοποίηση είναι με τρεις περιορισμούς:

$$x_{ij} \leq x_i$$

$$x_{ij} \leq x_j$$

$$x_{ij} \geq x_i + x_j - 1$$

$$x_i, x_j, x_{ij} \in \mathbb{B}$$

Μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι από τους παραπάνω περιορισμούς προκύπτει $x_{ij} = 1$ αν και μόνο αν $x_i = x_j = 1$ (φυσικά κάτω από την υπόθεση $x_{ij}, x_i, x_j \in \mathbb{B}$)

Μπορούμε τώρα να δούμε κάποιες ενδιαφέρουσες κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης στις οποίες βρίσκουν εφαρμογή οι δυαδικές μεταβλητές.

4.2.1. Το πρόβλημα τοποθέτησης σταθμών παραγωγής

Στη γενική περίπτωση το πρόβλημα τοποθέτησης σταθμών παραγωγής (facility location problem) περιγράφεται ως εξής: Δίνονται n δυνατές τοποθεσίες στις οποίες μπορούν να αναπτυχθούν σταθμοί παραγωγής ή εξυπηρέτησης μιας εταιρείας. Επίσης υπάρχουν m πελάτες που πρέπει να εξυπηρετηθούν. Υπάρχει ένα κόστος c_j αν ανοίξει σταθμός στην τοποθεσία j, $j=1,\dots,n$. Επίσης υπάρχει κόστος h_{ij} αν ο πελάτης i σταλεί στο σταθμό της τοποθεσίας j για εξυπηρέτηση. Κάθε πελάτης πρέπει να εξυπηρετηθεί από ένα μοναδικό σταθμό. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί σε ποιές τοποθεσίες θα ανοίξουν σταθμοί και πώς θα γίνει η κατανομή των πελατών στους σταθμούς ώστε το συνολικό κόστος να είναι ελάχιστο.

Εδώ έχουμε δύο τύπων αποφάσεις και χρησιμοποιούμε δύο κατηγορίες δυαδικών μεταβλητών απόφασης:

$x_j = 1$ (ανοίγει σταθμός στην τοποθεσία j), $j=1,\dots,n$

$y_{ij} = 1$ (ο πελάτης i εξυπηρετείται από την τοποθεσία j) $\begin{array}{l} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{array}$

Με βάση αυτή την επιλογή μεταβλητών, η αντικειμενική συνάρτηση για το συνολικό κόστος είναι

$$\text{Συνολικό κόστος} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} y_{ij}$$

Για τους περιορισμούς έχουμε: Πρώτον ο πελάτης i μπορεί να εξυπηρετηθεί από την τοποθεσία j μόνο αν υπάρχει σταθμός σ' αυτή την τοποθεσία. Επομένως σύμφωνα με όσα είδαμε παραπάνω έχουμε περιορισμούς της μορφής

$$y_{ij} \le x_j, \quad i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n$$

Επίσης κάθε πελάτης πρέπει να εξυπηρετηθεί από ακριβώς ένα σταθμό, δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad i=1,\dots,m$$

Περιληπτικά το μοντέλο ακέραιου προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα είναι

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} y_{ij}$$

$$y_{ij} \le x_j, \quad i=1,\dots,m, \; j=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j, y_{ij} \in \mathbb{B} \quad \forall i, j.$$

4.2.2 Το πρόβλημα τοποθέτησης - παραγωγής.

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί παραλλαγή του προηγούμενου. Έστω ότι η εταιρεία παράγει ένα προϊόν, από το οποίο χρειάζεται συνολική ποσότητα d σε ετήσια βάση. Για την παραγωγή μπορεί να ανοίξει εργοστάσια σε οποιεσδήποτε από n δεδομένες τοποθεσίες, $j=1,\dots,n$. Αν ανοίξει σταθμός στην τοποθεσία j τότε υπάρχει ένα ετήσιο κόστος συντήρησης του σταθμού ίσο με K_j. Επίσης η δυναμικότητα του σταθμού (δηλ. η μέγιστη ετήσια ποσότητα παραγωγής) είναι ίση με M_j, ενώ το μοναδιαίο κόστος παραγωγής για το συγκεκριμένο προϊόν ίσο με K_j. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί πού θα ανοίξουν σταθμοί όπως επίσης και οι αντίστοιχες ποσότητες παραγωγής, ώστε να ικανοποιηθεί η συνολική ετήσια ζήτηση με το ελάχιστο συνολικό κόστος.

Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές απόφασης:

$x_j = 1$ (ανοίγει σταθμός στην τοποθεσία j), $j=1,\dots,n$ $(\in \mathbb{B})$

$y_j =$ ποσότητα παραγωγής στην τοποθεσία j $(\in \mathbb{R}_+)$

Το συνολικό κόστος είναι ίσο με

$$\sum_{j=1}^{n} K_j x_j + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j$$

Για τους περιορισμούς έχουμε: Πρώτον η συνολική ποσότητα παραγωγής πρέπει να είναι ίση με d:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = d$$

Επίσης αν στην τοποθεσία j δεν ανοίξει εργοστάσιο (σταθμός) τότε δεν μπορεί να γίνει παραγωγή, ενώ άν ανοίξει εργοστάσιο, τότε η παραγωγή δεν μπορεί να υπερβαίνει τη δυναμικότητα M_j. Αλγεβρικά αυτό σημαίνει ότι αν $x_j = 0$ τότε $y_{ij} = 0$, ενώ αν $x_j = 1$ τότε $y_j \leq M_j$.

Το παραπάνω εκφράζεται με ένα περιορισμό της μορφής

$$y_j \leq M_j x_j$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ανάλογα με την τιμή του $x_j = 0$ ή 1 παίρνουμε το σωστό περιορισμό για τό y_{ij}.

Επίσης παρατηρούμε ότι ο παραπάνω περιορισμός είναι γραμμικός (η M_j είναι δεδομένη σταθερά)

Συνοπτικά καταλήγουμε στο παρακάτω πρόβλημα μ.α.π.

$$\min \sum_{j=1}^{n} k_j x_j + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = d$$

$$y_j \leq M_j x_j \quad , \quad j=1,\dots,n$$

$$x_j \in \mathbb{B} , \quad j=1,\dots,n$$

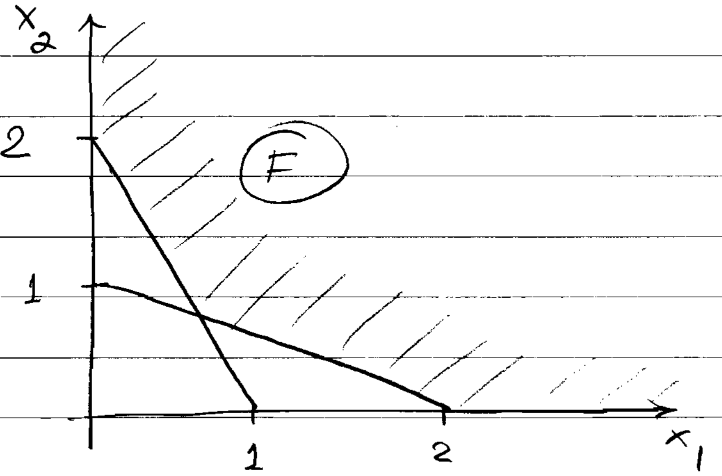
$$y_j \geq 0 , \; y_j \in \mathbb{R} , \quad j=1,\dots,n$$

4.2.3 Προβλήματα με Διαζευκτικούς Περιορισμούς

Σε όλα τα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού (γραμμικού, μη γραμμικού και ακέραιου) που έχουμε μελετήσει υποθέτουμε πάντα ότι όλοι οι περιορισμοί πρέπει να ικανοποιούνται, με άλλα λόγια μια λύση είναι εφικτή αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.
Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως υπάρχουν περιορισμοί διαζευκτικού τύπου, απαιτείται δηλαδή να ικανοποιείται τουλάχιστον ένας και όχι αναγκαστικά όλοι.
Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ~~ένα~~ συνηθισμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με εφικτή περιοχή

$$F = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 \geq 2, \ 2x_1 + x_2 \geq 2, \ x_1, x_2 \geq 0 \}$$

που παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 4.1.

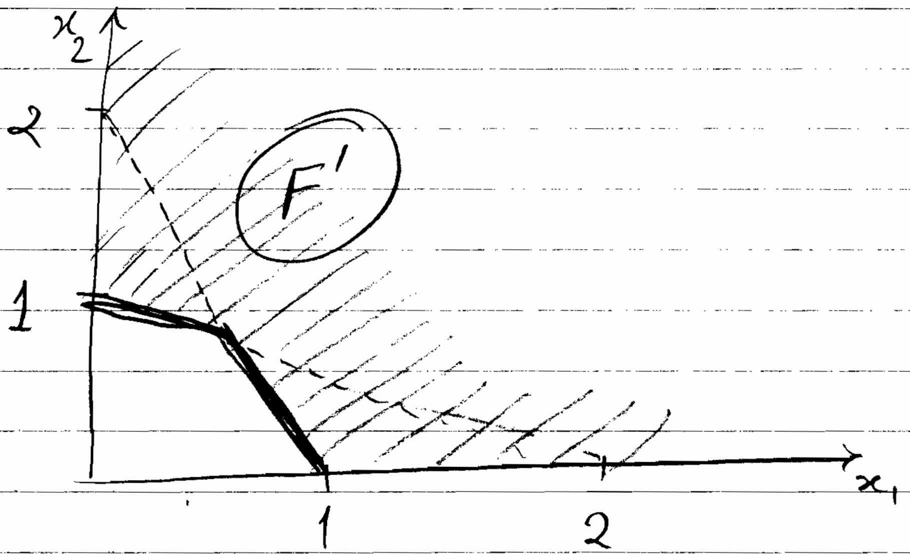


Σχήμα 4.1

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια λύση είναι εφικτή αν ικανοποιεί τουλάχιστον ένα από τους περιορισμούς, δηλαδή αν <u>είτε</u> $2x_1 + x_2 \geq 2$ <u>ή</u> $x_1 + 2x_2 \geq 2$ <u>ή και τα δύο</u>

Τώρα η εφικτή περιοχή F' είναι υπερσύνολο της F

και παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.2

$$F' = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + x_2 \geq 2 \text{ ή } x_1 + 2x_2 \geq 2, \quad x_1, x_2 \geq 0\}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρούμε ότι η εφικτή περιοχή F δεν είναι κυρτό σύνολο, επομένως δεν είναι δυνατό να εκφραστεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Χρησιμοποιώντας δυαδικές μεταβλητές μπορούμε να εκφράσουμε αυτού του είδους τα προβλήματα με τη βοήθεια 0-1 προγραμματισμού. Για παράδειγμα για το σύνολο F' εισάγουμε μια δυαδική μεταβλητή y και θεωρούμε τους εξής περιορισμούς

$$2x_1 + x_2 \geq 2y$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2y \qquad (4.3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad y \in \{0, 1\}$$

που απαιτούμε να ικανοποιούνται όλοι, όπως στα συνήθη προβλήματα

Για να δούμε ότι αυτή η μορφοποίηση είναι ισοδύναμη με το αρχικό πρόβλημα, θεωρούμε το σύνολο

$$\tilde{F} = \{(x_1, x_2, y) \mid \text{ικανοποιούνται οι } (4.3)\}$$

Τότε $\tilde{F} = \{(x_1, x_2, 0) \mid (4.3)\} \cup \{(x_1, x_2, 1) \mid (4.3)\}$

$$\tilde{F} = \{(x_1, x_2, 0) \mid 2x_1 + x_2 \geq 0,\ x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1, x_2 \geq 0\} \cup$$
$$\{(x_1, x_2, 1) \mid 2x_1 + x_2 \geq 2,\ x_1 + 2x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

Επειδή $2x_1 + x_2 \geq 0 \ \forall\ x_1, x_2 \geq 0$ και $x_1 + 2x_2 \geq 0 \ \forall\ x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\tilde{F} = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_1, x_2 \geq 0\} \cup \{(x_1, x_2, 1) \mid 2x_1 + x_2 \geq 2,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

δηλαδή υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου F' και του $\tilde{F}$.

Διαισθητικά η παρουσία της y επιτρέπει το εξής: αν $y=1$ τότε επιβάλλεται ο περιορισμός $x_1 + 2x_2 \geq 2$, ενώ ο πρώτος γίνεται πάντα αληθής δηλαδή δεν εξετάζεται αν ικανοποιείται ή όχι. Αντίστοιχα για $y=0$.

Παρ' όλο που το παραπάνω τέχνασμα δουλεύει για το συγκεκριμένο πρόβλημα, δεν γενικεύεται εύκολα.
Για παράδειγμα, τι γίνεται αν έχουμε 3 περιορισμούς με διάζευξη; Επίσης τι γίνεται αν ο πρώτος π.χ. περιορισμός γίνει $2x_1 + x_2 \leq 2$; Τότε δεν μπορούμε

να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμένο περιορισμό

$$2x_1 + x_2 \le 2y \quad ,$$

γιατί για $y=1$ αυτός αντιστοιχεί στον αρχικό $2x_1+x_2 \le 2$, ενώ για $y=0$ γίνεται $2x_1+x_2 \le 0$ πού είναι αδύνατος.

Επομένως χρειαζόμαστε μια γενίκευση της προηγούμενης μεθόδου που να λειτουργεί για όλες τις περιπτώσεις.

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο περιορισμών

$$\underline{a}_j' \underline{x} \le b_j \quad , \quad j=1,\dots,n \tag{4.4}$$

από τους οποίους απαιτείται να ικανοποιούνται τουλάχιστον k, για κάποιο $k \le n$.

Η γενική ιδέα για ένα 0-1 μοντέλο του παραπάνω προβλήματος είναι η εξής:

Εισάγουμε n δυαδικές μεταβλητές y_j, $j=1,\dots,n$ τέτοιες ώστε

$$y_j = 1 \text{ (ο περιορισμός } j \text{ επιβάλλεται να ικανοποιείται)}$$

Τότε οι περιορισμοί πρέπει να εκφραστούν με τη βοήθεια των y_j έτσι ώστε αν $y_j=1$ ο j-περιορισμός ισχύει όπως έχει δοθεί ενώ αν $y_j=0$ αντιστοιχεί σε τετριμμένο περιορισμό, δηλαδή σε ταυτότητα που ισχύει πάντα. Αυτό γίνεται αν γράψουμε

$$\underline{a}_j' \underline{x} \le b_j y + M(1-y),$$

όπου $M \to \infty$ είναι μια αυθαίρετα μεγάλη σταθερά.

Παρατηρούμε ότι για $y=1 \Rightarrow \underline{a}_j'\underline{x} \le b_j$ ενώ για $y_j=0 \Rightarrow \underline{a}_j'\underline{x} \le M$ πού είναι τετριμμένος περιορισμός.

(δηλαδή για $y_j=0$ ο περιορισμός δεν είναι πια περιορισμός επειδή το $\underline{a}_j'\underline{x}$ επιτρέπεται να παίρνει οποιαδήποτε τιμή).

Για να συμπληρωθεί το μοντέλο πρέπει τουλάχιστον k από τους n περιορισμούς να ικανοποιηθούν. Επομένως χρειαζόμαστε

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \ge k$$

Συνοπτικά το παρακάτω μοντέλο είναι ισοδύναμο με το αρχικό (4.4):

$$\begin{aligned} &\underline{a}_j'\underline{x} \le b_j + M(1-y_j) \quad j=1,\dots,n \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j \ge k, \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Επισημαίνουμε ότι το μοντέλο (4.5) αντιστοιχεί στην εφικτή περιοχή ενός προβλήματος μεικτού ακέραιου προγραμματισμού, καθώς απαιτείται να ισχύουν όλοι οι περιορισμοί συζευκτικά.
Αυτό που κερδίζουμε με την εισαγωγή των δυαδικών μεταβλητών είναι να εκφράσουμε το διαζευκτικό σύνολο (4.4) ως συζευκτικό σύνολο (4.5).

4.2.4. Μεταβλητές με πεπερασμένο σύνολο τιμών

Έστω ότι σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μια μεταβλητή απόφασης x απαιτείται να παίρνει τιμές σε ένα πεπερασμένο σύνολο:

$$x \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \qquad (4.6)$$

Περιορισμοί αυτού του τύπου είναι γενικότεροι από τους περιορισμούς ακέραιων τιμών. Για παράδειγμα ο περιορισμός

$$x \in \{2, 3, 4, 5\}$$

μπορεί να εκφραστεί ως

$$x \le 5$$
$$x \ge 2$$
$$x \in \mathbb{Z},$$

όμως ο περιορισμός $x \in \{1/2, 2, 5\}$ δεν μπορεί να εκφραστεί με αντίστοιχο τρόπο.

Για τη γενική περίπτωση (4.6) μπορούμε να εισάγουμε δυαδικές μεταβλητές

$$y_j = 1(x = a_j), \qquad j = 1, 2, \dots, k$$

οπότε η (4.6) είναι ισοδύναμη με την

$$x = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k$$
$$y_1 + \dots + y_k = 1,$$
$$y_1, \dots, y_k \in \mathbb{B}.$$

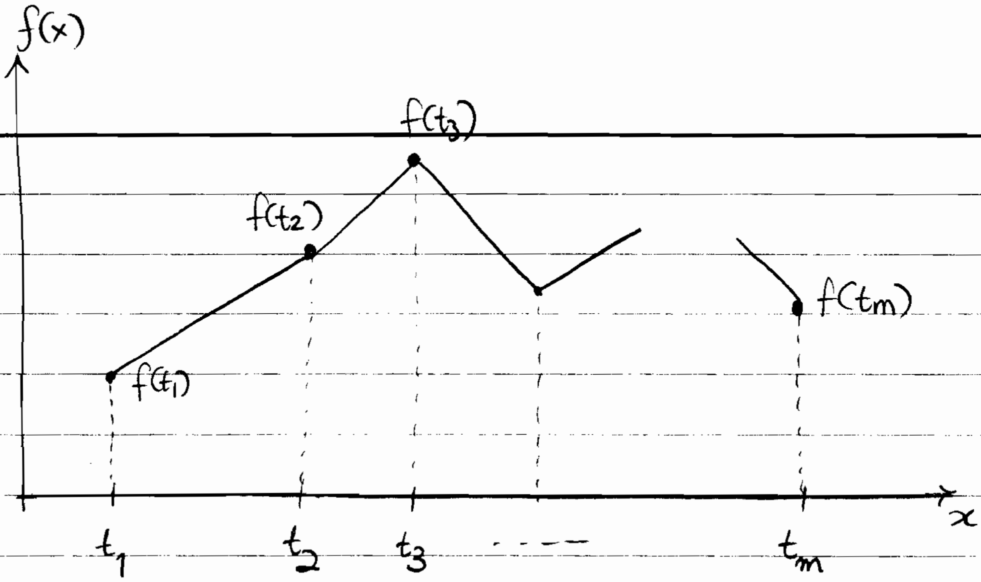
4.2.5. Γενική Τμηματικά Γραμμική Αντικειμενική Συνάρτηση

Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε διάφορα προβλήματα με τμηματικά γραμμική αντικειμενική συνάρτηση (ενότητα 1.5) τα οποία μπορούν να εκφραστούν ισοδύναμα ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Τέτοια είναι τα προβλήματα μεγιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κοίλης ή ελαχιστοποίησης μιας τμηματικά γραμμικής κυρτής συνάρτησης (maximin και minimax αντίστοιχα).
Στη γενική περίπτωση τμηματικά γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι δυνατή η έκφραση ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Είναι όμως δυνατή η αναγωγή σε πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού με τη βοήθεια κατάλληλων δυαδικών μεταβλητών.

Έστω ότι η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται σε ένα διάστημα $[t_1, t_m]$ και είναι τμηματικά γραμμική.

Επομένως υπάρχουν ενδιάμεσα σημεία $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m$ τέτοια ώστε η f είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m-1$, και επίσης συνεχής στο $[t_1, t_m]$.

Με βάση τα παραπάνω η f προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα σημεία $(t_1, \ldots, t_m)$ και τις τιμές που παίρνει σε αυτά: $(f(t_1), \ldots, f(t_m))$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3

Δεδομένων των $t_1, \dots, t_m, f(t_1), \dots, f(t_m)$ η $f(x)$ ορίζεται

$$f(x) = \begin{cases} f(t_1) + [f(t_2) - f(t_1)] \cdot \dfrac{x - t_1}{t_2 - t_1}, & x \in [t_1, t_2] \\ f(t_2) + [f(t_3) - f(t_2)] \cdot \dfrac{x - t_2}{t_3 - t_2}, & x \in [t_2, t_3] \\ \vdots \\ f(t_{m-1}) + [f(t_m) - f(t_{m-1})] \dfrac{x - t_{m-1}}{t_m - t_{m-1}}, & x \in [t_{m-1}, t_m] \end{cases}$$

Έστω το πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$z = \min \{ f(x) : x \in [t_1, t_m] \} \qquad (4.7)$$

Για την έκφραση του (4.7) ως προβλήματος μ.α.π. σκεφτόμαστε ως εξής:

Κατ' αρχήν αν $x \in [t_i, t_{i+1}]$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, m-1\}$, τότε το x μπορεί να εκφραστεί μονοσήμαντα ως κυρτός συνδυασμός των t_i, t_{i+1} δηλ. υπάρχει μοναδικό ζεύγος $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ τ.

$$x = \lambda_i t_i + \lambda_i t_{i+1}$$

$$\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$$

$$\lambda_i, \lambda_{i+1} \geq 0$$

Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δει κανείς ότι και η $f(x)$ έχει αντίστοιχη έκφραση:

$$f(x) = \lambda_i f(t_i) + \lambda_{i+1} f(t_{i+1})$$

Ένας ισοδύναμος τρόπος να εκφράσουμε την παραπάνω ιδιότητα είναι να γράψουμε

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_m t_m \\ f(x) &= \lambda_1 f(t_1) + \cdots + \lambda_m f(t_m) \\ \lambda_1 + \cdots &+ \lambda_m = 1 \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

με τον επιπλέον περιορισμό ότι αν $x \in [t_i, t_{i+1})$ τότε μόνο τα λ_i, λ_{i+1} επιτρέπεται να είναι θετικά ενώ όλα τα υπόλοιπα $\lambda_j = 0$. Για να εκφράσουμε την τελευταία ιδιότητα εισάγουμε $m-1$ δυαδικές μεταβλητές:

$$y_i = 1(x \in [t_i, t_{i+1})) \quad , i = 1, \ldots, m-2$$

$$y_{m-1} = 1(x \in [t_{m-1}, t_m])$$

Αυτές συνδέονται με την (4.8), καθώς η μεταβλητή λ_i επιτρέπεται να είναι θετική μόνο αν $y_{i-1} = 1$ ή $y_i = 1$.

Επομένως μια ισοδύναμη έκφραση του προβλήματος (4.8) είναι

$$\min \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(t_i) \qquad (4.9)$$

$$\text{υ.π.} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_1 \leq y_1$$

$$\lambda_i \leq y_{i-1} + y_i \quad , \quad i=2,\dots,m-1$$

$$\lambda_m \leq y_{m-1}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} y_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad , \quad i=1,\dots,m$$

$$y_i \in \mathbb{B} , \quad i=1,\dots,m-1$$

Στην (4.9) ο περιορισμός $\sum_{i=1}^{m-1} y_i = 1$ εκφράζει το γεγονός ότι το x μπορεί να βρίσκεται σε ακριβώς ένα από τα διαστήματα $[t_1,t_2), [t_2,t_3), \dots, [t_{m-1},t_m]$.

Στην παραπάνω ανάλυση δεν αλλάζει τίποτα αν έχουμε μεγιστοποίηση της $f(x)$.

4.2.6. Το Πρόβλημα Ανάθεσης

Το πρόβλημα ανάθεσης (assignment problem) ορίζεται γενικά ως εξής: Υπάρχουν n αντικείμενα και n θέσεις. Πρέπει κάθε αντικείμενο να τοποθετηθεί σε μια θέση και κάθε θέση να δεχθεί ακριβώς ένα αντικείμενο.
Αν το αντικείμενο i τοποθετηθεί στη θέση j, υπάρχει κόστος c_{ij}. Ζητείται να βρεθεί η ανάθεση των αντικειμένων που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.
Ορίζουμε $n \times n$ δυαδικές μεταβλητές:

$$x_{ij} = 1 \text{ (αντικείμενο } i \text{ ανατίθεται στη θέση } j) \quad , \; i,j=1,\ldots,n$$

Τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι το πρόβλημα γράφεται

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad , \quad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B} \quad , \quad i,j=1,\ldots,n$$

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε τους περιορισμούς $x_{ij} \in \mathbb{B}$ με $x_{ij} \geq 0$ τότε προκύπτει ένα πρόβλημα μεταφοράς.

4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΛΑΔΟΥ-ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε την επικρατέστερη, από πρακτική και υπολογιστική άποψη, μέθοδο επίλυσης προβλημάτων μ.α.π. Πρόκειται για τη μέθοδο κλάδου-φράγματος (branch and bound), που είναι μέθοδος γενικού σκοπού, δηλαδή μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση του γενικού προβλήματος μ.α.π.

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της μεθόδου κλάδου-φράγματος, χρειάζεται να κάνουμε μια εισαγωγική συζήτηση και να δούμε μερικά αρχικά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

Κατ' αρχήν πρέπει να τονίσουμε ότι τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού είναι συνήθως πολύ δυσκολότερα από τα αντίστοιχα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, τόσο από θεωρητική όσο και από υπολογιστική άποψη. Ενώ για το γραμμικό προγραμματισμό η μέθοδος Simplex (αλλά και άλλες νεότερες μέθοδοι όπως του Ελλειψοειδούς και του εσωτερικού σημείου) μπορεί να λύσει προβλήματα με χιλιάδες μεταβλητές και περιορισμούς σε λογικό χρονικό διάστημα, στον ακέραιο προγραμματισμό η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική. Εδώ παίζει κρίσιμο ρόλο η μορφή του προβλήματος. Για ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων (π.χ. το πρόβλημα ανάθεσης) υπάρχουν πολύ αποτελεσματικές μέθοδοι εύρεσης της βέλτιστης λύσης. Όμως υπάρχουν άλλες κατηγορίες προβλημάτων για τις οποίες η καλύτερη μέθοδος λύσης αυτή τη στιγμή έχει εκθετική πολυπλοκότητα, δηλαδή ο χρόνος επίλυσης αυξάνει εκθετικά με το μέγεθος του προβλήματος, με αποτέλεσμα προβλήματα ακόμη και μεσαίου μεγέθους (της τάξης των 100 μεταβλητών) να μη μπορούν

να λυθούν ούτε σε διάστημα πολλών ετών ακόμα και με τους ταχύτερους υπολογιστές.
Παράλληλα με την υπολογιστική δυσκολία, τα προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού (γενικότερα τα προβλήματα διακριτής βελτιστοποίησης) αποτελούν δύσκολα θεωρητικά προβλήματα, που έχουν μελετηθεί εκτεταμένα και βαθιά τα τελευταία 50 χρόνια. Γενικά η περιοχή της διακριτής βελτιστοποίησης αποτελεί μια από τις πιο πρόσφατες, δύσκολες αλλά και ερευνητικά ενεργές περιοχές της επιχειρησιακής έρευνας και των μαθηματικών γενικότερα. Ανάμεσα στα άλλα χρησιμοποιεί εργαλεία από τη θεωρία βελτιστοποίησης, τη συνδυαστική ανάλυση, τη θεωρία αριθμών και τη θεωρία υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

Στο κεφάλαιο αυτό δεν θα υπεισέλθουμε στη θεωρία του ακέραιου προγραμματισμού. Θα αρκεστούμε στην παρουσίαση της μεθόδου κλάδου φράγματος η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι είναι εύκολα κατανοητή, σχετίζεται άμεσα με το γραμμικό προγραμματισμό και μπορεί να προγραμματιστεί χωρίς μεγάλη δυσκολία.

4.3.1. Χαλαρώσεις και Φράγματα

Θα θεωρήσουμε ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\
& A\underline{x} = \underline{b} \\
& \underline{x} \geq 0 \\
& \underline{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Ο περιορισμός σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού γίνεται κυρίως για ευκολία στην παρουσίαση. Όπως θα φανεί παρακάτω, όλη η συζήτηση μπορεί να γενικευθεί άμεσα στην περίπτωση του μεικτού ακέραιου προγραμματισμού.

Ονομάζουμε γενικά χαλάρωση (relaxation) ενός προβλήματος βελτιστοποίησης ένα πρόβλημα που προκύπτει από το αρχικό με την απαλοιφή ή τη χαλάρωση κάποιων περιορισμών. Η εφικτή περιοχή ενός προβλήματος χαλάρωσης είναι γενικά υπερσύνολο της εφικτής περιοχής του αρχικού προβλήματος, και η βέλτιστη τιμή εξ ίσου καλή ή καλύτερη από αυτή του αρχικού προβλήματος.

Στην περίπτωση του ακέραιου προγραμματισμού ιδιαίτερα χρήσιμη είναι μια συγκεκριμένη χαλάρωση, η λεγόμενη χαλάρωση γραμμικού προγραμματισμού (γ.π.) (LP relaxation). Αυτή προκύπτει από το αρχικό π.α.π. αν απαλείψουμε τους περιορισμούς ακέραιων τιμών. Επομένως για το π.α.π. (4.10) η χαλάρωση γ.π. ορίζεται ως

$$
\begin{aligned}
z_{LP} = \max\ & \underline{c}'\underline{x} \\
& A\underline{x} = \underline{b} \\
& \underline{x} \geq 0
\end{aligned}
\qquad (4.11)
$$

Φυσικά η (4.11) αντιστοιχεί σε ένα π.γ.π. Επίσης ισχύει

$$z_{LP} \geq z \qquad (4.12)$$

με ισότητα αν και μόνο αν η (4.11) έχει τουλάχιστον μια βέλτιστη λύση $\underline{x}^*_{LP} \in \mathbb{Z}^n$, δηλαδή αν η χαλάρωση γ.π. έχει ακέραιη βέλτιστη λύση. (αποδείξτε τον παραπάνω ισχυρισμό).

Η (4.12) είναι χρήσιμη γιατί παρέχει ένα άνω φράγμα για τη βέλτιστη τιμή z που γενικά μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί ακριβώς. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε βρει μια εφικτή λύση $\underline{x}^0$ του προβλήματος Π.Α.Π. (4.10), δηλαδή ακέραιη. Έστω $z^0 = \underline{c}' \cdot \underline{x}^0$ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για αυτή τη λύση. Επειδή η $\underline{x}^0$ δεν είναι γενικά βέλτιστη, ισχύει $z^0 \le z$. Σε συνδυασμό με την ανισότητα (4.12), έχουμε καταφέρει να βρούμε ένα διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η βέλτιστη τιμή z:

$$z^0 \le z \le z_{LP} \qquad (4.13)$$

Η (4.13), εκτός από το διάστημα τιμών για τη z, μας δίνει και ένα άνω φράγμα για το πόσο "κακή" (υποβέλτιστη) είναι η λύση $\underline{x}^0$ που έχουμε βρει. Πραγματικά από την (4.13) προκύπτει

$$0 \le z - z^0 \le z_{LP} - z^0 \qquad (4.14)$$

που σημαίνει ότι το <u>χάσμα βελτιστότητας</u> (suboptimality gap) της x^0, $z - z^0$, είναι το πολύ $z_{LP} -$
Επίσης, αν επιπλέον ισχύει $z^0 \ge 0$, τότε

$$\frac{z - z_0}{z} \le \frac{z_{LP} - z^0}{z} \le \frac{z_{LP} - z^0}{z^0} \qquad (4.15)$$

Η (4.15) δίνει ένα άνω φράγμα για το ποσοστό υποβελτιστότητας (δηλαδή το σχετικό λάθος) της x^0, αν τη δεχθούμε ως προσεγγιστική λύση του προβλήματος (4.10).
Είναι σημαντικό να τονίσουμε πάλι ότι στην παραπάνω συζήτηση η z (και επομένως και η βέλτιστη λύση x^* της (4.10)) μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστούν επακριβώς. Αντίθετα η z_{LP} προκύπτει ως λύση ενός Π.Γ.Π, ενώ

η x^0 και η z^0 μπορεί να προκύπτουν από την εφαρμογή ενός προσεγγιστικού αλγορίθμου για τη λύση του π.α.π. Τέτοιας μορφής αλγόριθμοι προσέγγισης χρησιμοποιούνται συχνά σε προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού. Η ποιότητά τους αξιολογείται από το συνδυασμό της ταχύτητας εύρεσης της λύσης $\underline{x}^0$ όπως επίσης και του πόσο κοντά βρίσκεται η λύση στη βέλτιστη, δηλαδή από ένα σχετικό σφάλμα της μορφής (4.15).

Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι σε πολλά προβλήματα α.π. η χαλάρωση γ.π. έχει μεγάλη διαφορά από το αρχικό πρόβλημα. Αυτό μπορεί να έχει ως συνέπεια να βρεθεί μια προσεγγιστική λύση x^0 για την οποία η υποβελτιστότητα $z-z^0$ να είναι στην πραγματικότητα μικρή αλλά επειδή $z_{LP}-z >> z-z^0$, η (4.14) και η (4.15) να δίνουν κακές εκτιμήσεις για την ποιότητα της x^0. Για το λόγο αυτό είναι χρήσιμο να βρεθούν καλύτερα άνω φράγματα για τη z απ' ότι αυτό της χαλάρωσης γ.π. Ένα μεγάλο μέρος της έρευνας στον α.π. εστιάζεται στην εύρεση τέτοιων φραγμάτων για διάφορες κατηγορίες προβλημάτων.

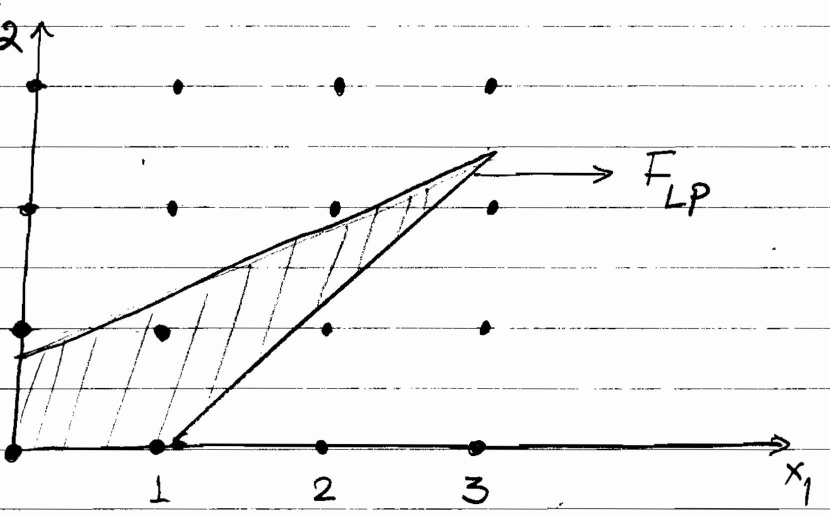
<u>Παράδειγμα 4.1.</u> Ας θεωρήσουμε το π.α.π.

$$
\begin{aligned}
z = \max\ & x_1 + x_2 \\
& -17x_1 + 30x_2 \leq 24 \\
& 25x_1 - 18x_2 \leq 30 \\
& x_1, x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Η χαλάρωση γ.π. είναι $z_{LP} = \max\ x_1 + x_2$

$$-17x_1 + 30x_2 \le 24$$
$$25x_1 - 18x_2 \le 30$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Στο Σχήμα 4.4 φαίνεται η εφικτή περιοχή F_{LP} του z_{LP} και οι εφικτές (ακέραιες) λύσεις του π.α.π.



Σχήμα 4.4

Το σύνολο των εφικτών λύσεων του π.α.π. είναι $F=\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$
Επομένως η βέλτιστη λύση είναι $x^* = (1,1)$ με $z=2$
Από την άλλη πλευρά η χαλάρωση γ.π. έχει λύση
$z_{LP} = \frac{11}{2}$ με $x^*_{LP} = \left(3, \frac{5}{2}\right)$

Αν ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος μας δώσει ως λύση του z την $x^0 = (1,0)$ τότε $z^0 = 1$. Χωρίς να γνωρίζουμε την τιμή του z θα λέγαμε από την (4.15) ότι $\frac{z - z_0}{z} \le \frac{z_{LP} - z^0}{z^0} = 4.5$

δηλαδή ότι το χάσμα βελτιστότητας της z^0 είναι το πολύ 4.5 φορές η τιμή του z, ενώ στην πραγματικότητα ισχύει
$\frac{z - z_0}{z} = 1$ δηλ. 1 φορά.

4.3.2. Η μέθοδος κλάδου-φράγματος

Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα (4.10), και έστω F η εφικτή περιοχή

$F=\{\underline{x}\in \mathbb{Z}^n \mid A\underline{x}=b,\ \underline{x}\geq 0\}$, οπότε $z=\max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x}\in F\}$

Ας θεωρήσουμε μια διαμέριση του συνόλου $F=F_1\cup F_2$ όπου $F_1\cap F_2=\phi$. Τότε ένας τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα (4.10) είναι να λύσουμε τα δύο υποπροβλήματα

$$z(F_1)=\max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x}\in F_1\},\qquad z(F_2)=\max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x}\in F_2\}$$

και να πάρουμε την καλύτερη από τις δύο λύσεις, δηλαδή

$$z(F)=z=\max\{z(F_1),\ z(F_2)\} \tag{4.16}$$

Τα προβλήματα $z(F_1)$, $z(F_2)$ είναι επίσης π.α.π, επομένως αν εφαρμόσουμε χαλάρωση γ.π. σε καθένα απ' αυτά παίρνουμε δύο άνω φράγματα:

$$\begin{aligned} z(F_1) &\leq z_{LP}(F_1) \\ z(F_2) &\leq z_{LP}(F_2) \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι έχουμε με κάποιο τρόπο βρεί μια εφικτή λύση $x^0\in F$ του αρχικού προβλήματος, με $z^0=\underline{c}'\underline{x}^0$ την τιμή της αντικ. συνάρτησης, επομένως $z^0\leq z$.

Η βασική ιδέα της μεθόδου κλάδου-φράγματος είναι η εξής:

Ας υποθέσουμε ότι για τη λύση $\underline{x}^0$ ισχύει

$$z^0\geq z_{LP}(F_1) \tag{4.18}$$

δηλ. η $\underline{x}^0$ είναι καλύτερη από τη βέλτιστη λύση της χαλάρωσης για το F_1. Από τις (4.16)-(4.18) προκύπτει ότι

$$z(F_1)\leq z_{LP}(F_1)\leq z^0\leq z \tag{4.19}$$

Από την (4.19) βλέπουμε ότι δεν έχει νόημα να λύσουμε το πρόβλημα $z(F_1)$ ακριβώς, γιατί η λύση του αποκλείεται να είναι καλύτερη από την ήδη υπάρχουσα λύση $\underline{x}^0$. Επομένως αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα $z(F_2)$ και θα έχουμε

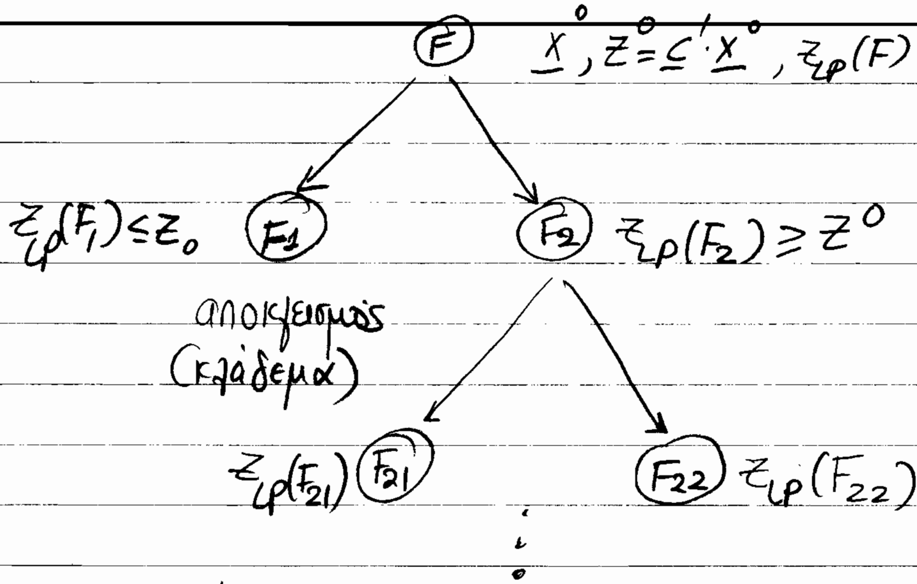
$$z = \max\{z^0, z(F_2)\}$$

Τώρα το πρόβλημα $z(F_2)$ είναι π.α.π. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε αναδρομικά τον παραπάνω συλλογισμό, δηλαδή να σχηματίσουμε μια διαμέριση του $F_2 = F_{21} \cup F_{22}$ και να συνεχίσουμε με τον "ίδιο τρόπο".

Από την άλλη πλευρά, αν δεν ισχύει καμμιά ανισότητα της μορφής (4.18) δηλαδή αν $z^0 \le z_{LP}(F_1)$, $z^0 \le z_{LP}(F_2)$, τότε δεν μπορούμε να αποκλείσουμε κανένα από τα υποπροβλήματα. Σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να προχωρήσουμε αναδρομικά και στα δύο υποπροβλήματα με διαμερίσεις.

Βλέπουμε ότι έχουν εμφανιστεί τα σπέρματα μιας επαναληπτικής διαδικασίας πού λύνει διαδοχικά μικρότερα υποπροβλήματα, ενώ σε κάποιο στάδιο ένα υποπρόβλημα μπορεί να αποκλειστεί, δηλαδή να μη διαμεριστεί περαιτέρω, επειδή αποκλείεται να δώσει βέλτιστη λύση. Η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφεί σχηματικά με τη βοήθεια ενός γραφήματος δέντρου όπως στο Σχήμα 4.5. Στο γράφημα κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε ένα υποπρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού με την αντίστοιχη εφικτή περιοχή.

Αν ένα υποπρόβλημα αποκλειστεί λόγω ανισότητας του τύπου (4.18) τότε λέμε ότι έχει γίνει <u>κλάδεμα</u> (pruning) του δέντρου στον κόμβο αυτό, καθώς δεν προχωρούμε στην ανάπτυξη κλάδων από τον συγκεκριμένο κόμβο.



Σχήμα 4.5

Η περιγραφή του αλγορίθμου κλάδου-φράγματος δεν είναι ακόμη πλήρη καθώς δεν έχουμε καθορίσει πώς γίνεται η διαμέριση, ούτε πότε τελειώνει η διαδικασία. Επίσης δεν έχουμε πει τίποτα για το πώς βρίσκουμε την λύση $\underline{x}^0$. Αυτά τα ερωτήματα θα δούμε αμέσως.

Πρώτα απ' όλα αν σε κάποιο υποπρόβλημα $z(F_\alpha)$ βρούμε τη βέλτιστη λύση της χαλάρωσης γ.π. και ισχύει $x^*_{LP}(F_a) \in \mathbb{Z}^n$, δηλ. είναι ακέραια λύση, τότε όπως έχουμε δει, ισχύει $z(F_a) = z_{LP}(F_a)$. Σ' αυτή την περίπτωση επίσης δεν έχει νόημα να προχωρήσουμε σε παραπέρα διαμέριση του F_α, αφού το έχουμε επιλύσει ακριβώς. Έχουμε δηλαδή πάλι "κλάδεμα" του δέντρου στον κόμβο F_a. Εδώ όμως έχουμε και κάτι παραπάνω. Αυτό είναι η λύση $x^*_{LP}(F_a)$, που, αφού είναι ακέραια, αποτελεί μια νέα εφικτή λύση του $z(F)$. Αν αυτή η νέα λύση προκύψει ότι είναι καλύτερη από την προηγούμενη $\underline{x}^0$, δηλαδή $\underline{c}'x^*_{LP}(F_a) > \underline{c}'\underline{x}^0 = z^0$, τότε μπορούμε να ξεχάσουμε τη $\underline{x}^0$ και για τα επόμενα βήματα να χρησιμοποιήσουμε τη νέα λύση $x^*_{LP}(F_a)$ ως λύση $\underline{x}^0$. Αυτό είναι σημαντικό χαρακτηριστικό του αλγορίθμου, επειδή έτσι κάθε φορά έχουμε στη διάθεσή μας την καλύτερη εφικτή λύση που έχει παραχθεί μέχρι το συγκεκριμένο κόμβο του δέντρου. Επίσης, επειδή η νέα λύση έχει μεγαλύτερη τιμή του z, είναι ευκολότερο να γίνουν κλαδέματα σε επόμενα βήματα, λόγω ανισοτήτων της μορφής (4.18). Κλάδεμα αυτού του τύπου ονομάζεται εξιχνίαση (fathoming) του υποπροβλήματος-κόμβου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε ένα κόμβο-υποπρόβλημα F_a η βέλτιστη λύση $x^*_{LP}(F_a) \notin \mathbb{Z}^n$, δηλαδή έχει τουλάχιστον μια μη ακέραιη συνιστώσα. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι στη λύση $x^*_{LP}(F_a)$ ισχύει $x^*_1 \notin \mathbb{Z}$. Τότε μια διαμέριση του συνόλου F_a είναι η εξής:

$$F_{a1} = \{ \underline{x} \in F_a ,\ x_1 \leq \lfloor x^*_1 \rfloor \} ,\quad F_{a2} = \{ \underline{x} \in F_a ,\ x_1 \geq \lfloor x^*_1 \rfloor + 1 \}$$

όπου με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x.
Η ιδέα της διαμέρισης δηλαδή είναι να προσδιορίσουμε μια μη ακέραιη συνιστώσα της $x^*_{LP}(F_a)$ και να δημιουργήσουμε δύο υποπροβλήματα της παραπάνω μορφής. Με τον τρόπο αυτό σε κανένα από τα δύο υποπροβλήματα F_{a1}, F_{a2} η $x^*_{LP}(F_a)$ δεν είναι εφικτή λύση αφού η $x^*_1 \notin \mathbb{Z}$ και έχει αποκλειστεί και από τα δύο λόγω του ορισμού.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαμέριση έχει σκοπό να αποκλείσει κάποιες μη ακέραιες λύσεις που προκύπτουν από τη χαλάρωση γ.π., χωρίς όμως να αποκλείει ακέραιες λύσεις, πράγμα που θα ήταν λάθος.
Παρατηρούμε επίσης ότι σε κάθε ένα από τα F_{a1}, F_{a2} έχει προστεθεί ένας γραμμικός περιορισμός επομένως και τα δύο συνεχίζουν να είναι Π.α.Π., δηλαδή μπορεί να συνεχιστεί

η αναδρομική διαδικασία.

Το επόμενο ερώτημα είναι πότε σταματά ο αλγόριθμος και αν βρίσκει τη βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος.

Ο αλγόριθμος σταματά όταν όλα τα υποπροβλήματα-κόμβοι έχουν κλαδευτεί (είτε λόγω φράγματος είτε λόγω επίλυσης). Τότε η καλύτερη λύση που έχει διατηρηθεί είναι και η βέλτιστη λύση του προβλήματος. Αυτό προκύπτει εύκολα από τους συλλογισμούς που αναπτύξαμε προηγουμένως για τους μηχανισμούς κλαδέματος και εξιχνίασης.

Παρακάτω δίνουμε μια συνοπτική περιγραφή του αλγορίθμου κλάδου-φράγματος. Σε κάθε βήμα υπάρχει ένα σύνολο από υποπροβλήματα (κόμβους) που δεν έχουν εξεταστεί. Αυτό ονομάζεται σύνολο ενεργών υποπροβλημάτων ή ενεργών κόμβων (active nodes). Επίσης μπορεί να υπάρχει μια εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος $\underline{x}^0$ με τιμή $z^0 = \underline{c}'\cdot\underline{x}^0$ (αν έχει ήδη δημιουργηθεί). Αυτή ονομάζεται τρέχουσα λύση (incumbent solution).

Ο αλγόριθμος κλάδου-φράγματος λειτουργεί ως εξής:

1. Επιλέγουμε έναν από τους ενεργούς κόμβους (F_i)
2. Για το υποπρόβλημα του κόμβου υπολογίζουμε το φράγμα της χαλάρωσης π.χ. $z_{LP}(F_i)$
3. Αν ισχύει $z_{LP}(F_i) \leq z^0$ ο κόμβος κλαδεύεται και παύει να είναι ενεργός.
4. Αν $z_{LP} > z^0$ τότε:
   - (4a) Αν η λύση $x^*_{LP}(F_i) \in \mathbb{Z}^n$ τότε ο κόμβος έχει εξιχνιαστεί (fathomed). Αν $\underline{c}' x^*_{LP}(F_i) > z^0$,

Τότε η $\underline{x}^*_{LP}(F_i)$ γίνεται η νέα τρέχουσα λύση

$$\underline{x}_0 \leftarrow \underline{x}^*_{LP}(F_i), \quad z_0 \leftarrow \underline{c}' \cdot \underline{x}^*_{LP}(F_i)$$

διαφορετικά η τρέχουσα λύση παραμένει η προηγούμενη.
Ο κόμβος παύει να είναι ενεργός και στις δύο περιπτώσεις

(4β) Αν $\underline{x}^*_{LP}(F_i) \notin \mathbb{Z}_n$, επιλέγουμε μια μη ακέραιη συνιστώσα της $\underline{x}^*_{LP}(F_i)$, έστω την $x_1^*(F_i)$

Δημιουργούμε δύο νέους ενεργούς κόμβους F_{i1}, F_{i2} που προκύπτουν από το υποπρόβλημα F_i με την προσθήκη των περιορισμών

$$x_1 \leq \lfloor x_1^* \rfloor \quad \text{στο} \quad F_{i1}$$

$$x_1 \geq \lfloor x_1^* \rfloor + 1 \quad \text{στο} \quad F_{i2}$$

Ο κόμβος F_i παύει να είναι ενεργός.

<u>Παρατηρήσεις</u> (1) Αν σε ένα υποπρόβλημα η χαλάρωση γ.π. είναι μη εφικτό π.γ.π. ο κόμβος διαγράφεται.

(2) Ο αλγόριθμος σταματά όταν εξαντληθεί η λίστα ενεργών κόμβων. Τότε, αν δεν έχει δημιουργηθεί τρέχουσα λύση το πρόβλημα είναι ανέφικτο, διαφορετικά η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη

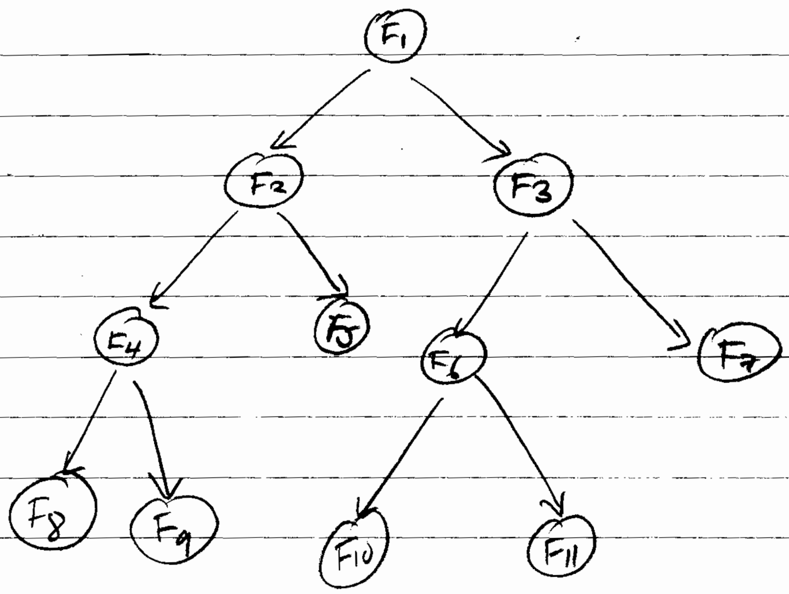
(3) Αν σε κάποιο βήμα υπάρχουν περισσότεροι από έναν ενεργοί κόμβοι, τότε υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές στρατηγικές

για την επιλογή αυτού που θα εξεταστεί. Οι πιο συνηθισμένες είναι:

(a) κατά βάθος πρώτα (depth-first). Όταν δημιουργούνται δύο νέοι κλάδοι, δηλαδή το δέντρο προχωράει κατά ένα επίπεδο από αυτό τον κλάδο, πρώτα εξετάζεται ένας από τους νέους κόμβους, και αυτό συνεχίζεται αναδρομικά.

(b) κατά εύρος πρώτα (breadth-first). Όταν τελειώσει η εξέταση ενός κόμβου, επιλέγεται ένας ενεργός κόμβος από το ίδιο επίπεδο (αν υπάρχει). Όταν τελειώσουν οι κόμβοι ενός επιπέδου προχωρούμε στην εξέταση κόμβων από το επόμενο επίπεδο.

Σχηματικά ας θεωρήσουμε ότι σε ένα πρόβλημα υπάρχουν τα υποπροβλήματα που φαίνονται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6

Ο αλγόριθμος κατά-βάθος-πρώτα θα τα εξέταζε με τη σειρά $F_1 \to F_2 \to F_4 \to F_8 \to F_9 \to F_5 \to F_3 \to F_6 \to F_{10} \to F_{11} \to F_7$
ενώ ο αλγόριθμος κατά εύρος πρώτα
με τη σειρά $F_1 \to F_2 \to F_3 \to F_4 \to F_5 \to F_6 \to F_7 \to F_8 \to F_9 \to F_{10} \to F_{11}$

④ Η χαλάρωση γ.π. δίνει ένα τρόπο για τον υπολογισμό άνω φράγματος σε κάθε κόμβο. Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί εναλλακτικοί τρόποι για τον υπολογισμό φραγμάτων (όπως π.χ Λαγκρανζιανή χαλάρωση) που εκμεταλλεύονται τη συγκεκριμένη δομή του προβλήματος.

⑤ Προφανώς αν αντί για μεγιστοποίηση έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα ακριβώς αντίστοιχο αλγόριθμο (αν δε θέλουμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή). Τώρα τα φράγματα χαλάρωσης θα είναι κάτω φράγματα και οι ανισότητες (4.17) – (4.19) θα ισχύουν με αντίστροφη φορά.

⑥ Για την περίπτωση 0-1 προγραμματισμού (όλες οι μεταβλητές 0-1) ο αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο τρόπο. Η μόνη διαφορά είναι ότι κατά τη διακλάδωση με μεταβλητή x_j, τα δύο υποπροβλήματα θα έχουν περιορισμούς

$x_j = 0$ και $x_j = 1$ αντίστοιχα.

⑦ Για τη γενική περίπτωση μικτού προγραμματισμού μπορούμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο με τη διαφορά ότι διακλαδώσεις γίνονται μόνο για μεταβλητές που έχουν ακέραιους περιορισμούς.

Παράδειγμα 4.2 Να λυθεί το παρακάτω π.α.π. με τον αλγόριθμο κλάδου-φράγματος:

$$z = \max\ 26x_1 + 28x_2 - 2000x_3$$

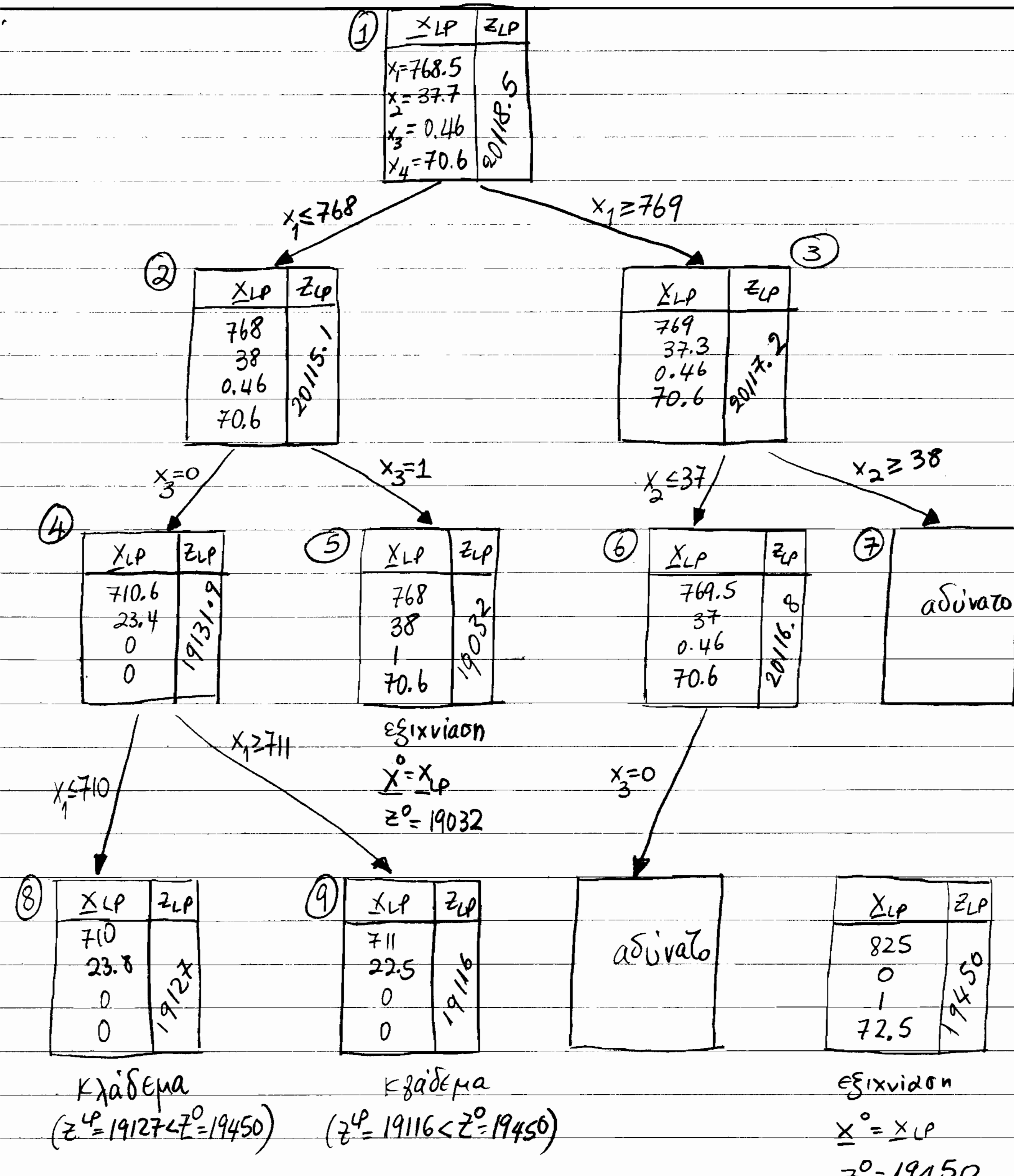
$$\begin{aligned}
\text{υ.π.}\quad & 9x_1 + 13x_2 \qquad\qquad\qquad -10x_4 \le 6700 \\
& 7x_1 + 6x_2 \le 6200 \\
& 10x_1 + 4x_2 - 1540x_3 + x_4 \le 7200 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 1650 \\
& -154x_3 + x_4 \le 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, \quad x_3 \in \mathbb{B}
\end{aligned}$$

Στο πρόβλημα αυτό έχουμε 2 ακέραιες και μία 0-1 μεταβλητή. Για τη μεταβλητή x_4 πού δεν έχει περιορισμό ακέραιων τιμών δε θα γίνουν διακλαδώσεις.

Επίσης το πρόβλημα δεν είναι σε κανονική μορφή. Αυτό δε δημιουργεί δυσκολία, καθώς η μέθοδος βασίζεται σε λύση διαδοχικών προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, τα οποία μπορούν να είναι ή όχι σε κανονική μορφή.

Η συνολική εικόνα του δέντρου που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου κλάδου φράγματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.7. Σε κάθε κόμβο φαίνεται η λύση $\underline{x}_{LP}$ της χαλάρωσης γ.π. και το άνω φράγμα z_{LP}.

Στους κλάδους φαίνεται ο περιορισμός που προστίθεται στο αντίστοιχο υποπρόβλημα.


1
x LP
z LP
x1=768.5
x2=37.7
x3=0.46
x4=70.6
20118.5
x1≤768
x1≥769
2
x LP
z LP
768
38
0.46
70.6
20115.1
3
x LP
z LP
769
37.3
0.46
70.6
20117.2
x3=0
x3=1
x2≤37
x2≥38
4
x LP
z LP
710.6
23.4
0
0
19131.9
5
x LP
z LP
768
38
1
70.6
19032
6
x LP
z LP
769.5
37
0.46
70.6
20116.8
7
αδύνατο
εξιχνίαση
x° = x LP
z° = 19032
x1≤710
x1≥711
x3=0
8
x LP
z LP
710
23.8
0
0
19127
9
x LP
z LP
711
22.5
0
0
19116
αδύνατο
x LP
z LP
825
0
1
72.5
19450
κλάδεμα
(z LP = 19127 < z° = 19450)
κλάδεμα
(z LP = 19116 < z° = 19450)
εξιχνίαση
x° = x LP
z° = 19450

Σχήμα 4.7

Ακολουθούμε τη στρατηγική εξέτασης κατά εύρος πρώτα.

Στον κόμβο 1 λύνουμε τη χαλάρωση γ.π. του αρχικού προβλήματος

$$
\begin{aligned}
z_{LP}(F_1) = \max\ & 26x_1 + 28x_2 - 2000x_3 \\
& 9x_1 + 13x_2 - 10x_4 \le 6700 \\
& 7x_1 + 6x_2 \le 6200 \\
& 10x_1 + 4x_2 - 1540x_3 + x_4 \le 7200 \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 1650 \\
& -154x_3 + x_4 \le 0 \\
& x_3 \le 1 \quad (\text{επειδή αρχικά } x_3 \in \{0,1\}) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Η λύση του $z_{LP}(F_1)$ είναι $\underline{x}_{LP}(F_1) = \begin{pmatrix} 768.5 \\ 37.7 \\ 0.46 \\ 70.6 \end{pmatrix}$, και $z_{LP} = 20118.5$

Επειδή δεν ικανοποιείται η ακεραιότητα των x_1, x_2, x_3 κάνουμε διακλάδωση με βάση τη μεταβλητή x_1 (θα μπορούσαμε να επιλέξουμε και τη x_2 ή τη x_3). Έτσι δημιουργούμε δύο νέους κόμβους. Στον κόμβο 2 επιλύουμε το π.γ.π. που προκύπτει από το $z_{LP}(F_1)$ με την προσθήκη του περιορισμού $x_1 \le 768$, ενώ στον κόμβο 3 το π.γ.π. που προκύπτει από το $z_{LP}(F_1)$ με την προσθήκη του περιορισμού $x_1 \ge 769$. Επειδή η στρατηγική είναι κατά εύρος πρώτα, επιλύουμε και τα δύο προβλήματα F_2, F_3 πριν προχωρήσουμε σε τυχόν περαιτέρω διακλαδώσεις.

Βρίσκουμε $z_{LP}(F_2) = 20115.1$, $\underline{x}_{LP}(F_2)$ μη ακέραιη

$z_{LP}(F_3) = 20117.3$, $\underline{x}_{LP}(F_3)$ μη ακέραιη

Σ' αυτό το σημείο οι ενεργοί κόμβοι είναι οι 2 και 3.

Στον κόμβο 2: Διακλαδώνουμε με βάση τη x_3 και δημιουργούμε τον κόμβο 4 με την προσθήκη του περιορισμού $x_3=0$ στο υποπρόβλημα F_2, και τον κόμβο 5 με την προσθήκη του περιορισμού $x_3=1$ στο υποπρόβλημα F_2.

Στον κόμβο 3: Διακλαδώνουμε με βάση την x_2, και δημιουργούμε τους κόμβους 6 και 7, προσθέτοντας τους περιορισμούς $x_2 \leq 37$ και $x_2 \geq 38$, αντίστοιχα, στο υποπρόβλημα F_3.

Τώρα το σύνολο ενεργών κόμβων είναι $\{4, 5, 6, 7\}$

Λύνουμε τα υποπροβλήματα και βρίσκουμε

$z_{LP}(F_4) = 19131.9$, $\underline{x}_{LP}(F_4)$ μη ακέραιη

$z_{LP}(F_5) = 19032$, $\underline{x}_{LP}(F_5) = \begin{pmatrix} 768 \\ 38 \\ 1 \\ 70.6 \end{pmatrix}$

Επειδή η $\underline{x}_{LP}(F_5)$ έχει ακέραιες τιμές x_1, x_2, x_3 αποτελεί την πρώτη τρέχουσα λύση:

$$\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 768 \\ 38 \\ 1 \\ 70.6 \end{pmatrix}, \quad z^0 = 19032$$

Ο κόμβος 5 έχει εξιχνιαστεί και παύει να είναι ενεργός, ούτε κάνουμε διακλαδώσεις

$z_{LP}(F_6) = 20116.8$, $\underline{x}_{LP}(F_6)$ μη ακέραιη

Επειδή $z_{LP}(F_6) > z^0$, δεν μπορεί να γίνει κλάδεμα στον κόμβο 6. Υπάρχει περιθώριο με περαιτέρω διακλαδώσεις από τον κόμβο 6 να καταλήξουμε σε ακέραιη λύση καλύτερη από την τρέχουσα.

$Z_{LP}(F_7)$: ανέφικτο πρόβλημα, επομένως στον κόμβο 7 γίνεται κλάδεμα.

Επιστρέφουμε στον κόμβο 4: Επειδή και εδώ $Z_{LP}(F_4) > Z^0$ δεν μπορούμε να κάνουμε κλάδεμα.
Κάνουμε διακλάδωση με βάση τη μεταβλητή $x_1 = 710.6$ και δημιουργούμε τους κόμβους 8, 9 με την προσθήκη των περιορισμών $x_1 \leq 710$ και $x_1 \geq 711$, αντίστοιχα στο υποπρόβλημα F_4.

Στον κόμβο 6 κάνουμε διακλάδωση με βάση τη μεταβλητή x_3 και δημιουργούμε τους κόμβους 10, 11 με την προσθήκη των περιορισμών $x_3 = 0$ και $x_3 = 1$, αντίστοιχα, στο υποπρόβλημα F_6.

Βρίσκουμε

$Z_{LP}(F_8) = 19127$, $\underline{X}_{LP}(F_8)$ μη ακέραιη

$Z_{LP}(F_9) = 19116$, $\underline{X}_{LP}(F_9)$ μη ακέραιη

$Z_{LP}(F_{10})$ αδύνατο $\Rightarrow$ κλάδεμα

$Z_{LP}(F_{11}) = 19450$, $\underline{X}_{LP}$ ακέραιη,

Επομένως ο κόμβος 11 έχει εξιχνιαστεί.
Η νέα λύση έχει $Z_{LP}(F_{11}) = 19450 > Z^0 = 19032$

Επομένως γίνεται αυτή η τρέχουσα λύση:

$$\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 825 \\ 0 \\ 1 \\ 72.5 \end{pmatrix} \qquad z^0 = 19450$$

και ο κόμβος 11 κλαδεύεται.

Οι ενεργοί κόμβοι τώρα είναι οι 8 και 9.

Επειδή $z_{LP}(F_8) < z^0$, ο 8 κλαδεύεται.

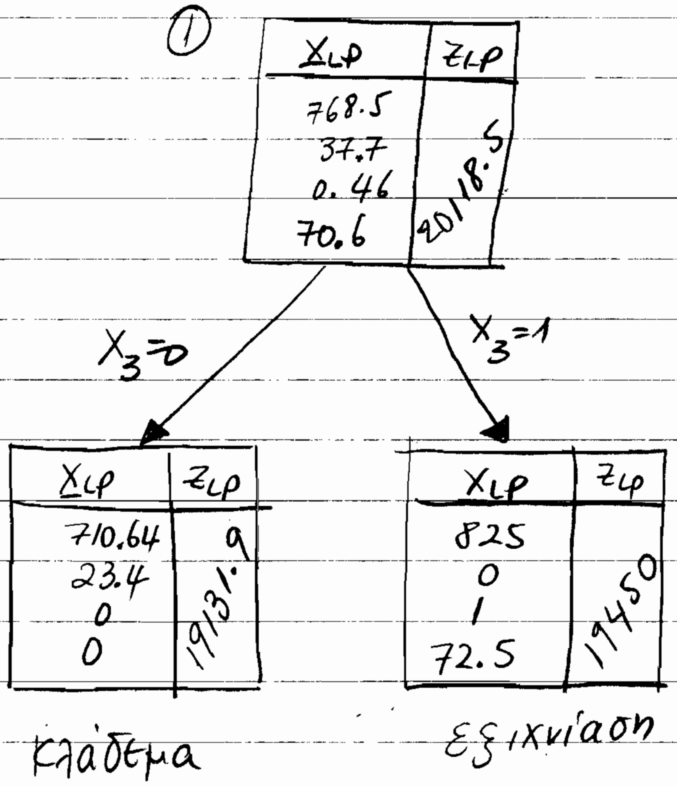
Επειδή $z_{LP}(F_9) < z^0$, ο 9 κλαδεύεται.

Τώρα έχουν εξαντληθεί οι ενεργοί κόμβοι και ο αλγόριθμος σταματά. Η τρέχουσα λύση $\underline{x}^0$ είναι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος:

$$\underline{x}^* = \begin{pmatrix} 825 \\ 0 \\ 1 \\ 72.5 \end{pmatrix} \qquad z^* = 19450$$

Πριν αφήσουμε το παράδειγμα σημειώνουμε ότι η στρατηγική εξέτασης κατά εύρος πρώτα και οι συγκεκριμένες επιλογές μεταβλητών για διακλάδωση σε κάθε κόμβο ήταν αυθαίρετες. Αν επιλέγαμε κάποια άλλη στρατηγική θα καταλήγαμε στην ίδια βέλτιστη λύση z^* φυσικά, αλλά με διαφορετικό δέντρο και αριθμό βημάτων. Για παράδειγμα αν στον κόμβο 1 επιλέγαμε τη μεταβλητή x_3 για διακλάδωση θα καταλήξαμε στο δέντρο του Σχήματος 4.8, όπου βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση εξετάζοντας 3 μόνο κόμβους.

Βλέπουμε επομένως ότι ο τρόπος εξέτασης και διακλάδωσης μπορεί να επηρεάσει σημαντικά το χρόνο επίλυσης του προβλήματος. Δυστυχώς δεν υπάρχει καμμιά στρατηγική που να είναι η καλύτερη για όλες τις περιπτώσεις. Έχουν γίνει όμως πολυάριθμες μελέτες και ερευνητικές προσπάθειες για την αξιολόγηση των διαφόρων στρατηγικών σε ειδικές κατηγορίες προβλημάτων.



$$x^0=\begin{pmatrix}825\\0\\1\\72.5\end{pmatrix} \qquad z^0=19450$$

Σχήμα 4.8

4.4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.1 Μια εταιρεία πρέπει να κάνει παράδοση παραγγελιών σε 10 πελάτες. Η ποσότητα που έχει παραγγείλει κάθε πελάτης είναι d_j, $j=1,\dots,10$. Η εταιρεία διαθέτει 4 φορτηγά. Το φορτηγό κ έχει χωρητικότητα L_k και ημερήσιο κόστος C_k (αν χρησιμοποιηθεί), $k=1,\dots,4$. Ολόκληρη η παραγγελία κάθε πελάτη πρέπει να παραδοθεί από ένα μόνο φορτηγό. Κάθε φορτηγό μπορεί να κάνει το πολύ 5 παραδόσεις παραγγελιών. Επίσης τα ζεύγη πελατών $\{1,7\}$, $\{2,6\}$ και $\{2,9\}$ δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν από το ίδιο φορτηγό. Δημιουργήστε ένα μοντέλο Α.Π. για την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους των φορτηγών.

Άσκηση 4.2 Μια εταιρεία έχει δύο προϊόντα $k=1,2$, ένα εργοστάσιο, δύο κέντρα διανομής $i=1,2$ και πέντε μεγάλους πελάτες $j=1,\dots,5$, των οποίων η ζήτηση d_{jk}, είναι γνωστή για κάθε ένα από τα δύο προϊόντα. Η εταιρεία μπορεί να διακινήσει κάθε προϊόν από ένα ή δύο κέντρα διανομής. Κάθε πελάτης πρέπει να πάρει όλη την ποσότητα κάθε προϊόντος από ένα μόνο κέντρο διανομής (όχι απαραίτητα το ίδιο και για τα δύο προϊόντα, π.χ. ο πελάτης 1 μπορεί να παραλάβει το προϊόν 1 από το κέντρο 1 και το προϊόν 2 από το κέντρο 2). Τα κόστη είναι:

f_{ik} = σταθερό κόστος αν το προϊόν κ διακινείται στο κέντρο i

f_{ijk} = σταθερό κόστος αν η ζήτηση του πελάτη j για το προϊόν κ ικανοποιείται από το κέντρο i

c_{ijk} = μοναδιαίο κόστος μεταφοράς προϊόντος κ από κέντρο i στον πελάτη j α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα διανομής για ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους.

β) Πώς αλλάζει το μοντέλο στο (α) αν η ζήτηση του πελάτη για ένα προϊόν μπορεί να διαμοιραστεί στα κέντρα διανομής;

Άσκηση 4.3. Θεωρούμε το πρόβλημα παραγωγής ενός προϊόντος σε ορίζοντα T περιόδων. Αν αποφασίσουμε να παράγουμε κατά την περίοδο t, υπάρχει ένα σταθερό κόστος ίσο με K_t ανεξάρτητα από την ποσότητα παραγωγ όπως επίσης και μεταβλητό κόστος ίσο με c_t ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος. Το κόστος αποθήκευσης κατά την περίοδο t είναι ίσο με h_t, $t=1,2,\ldots,T$ (όπως στο κεφάλαιο 1). Η ζήτηση είναι ίση με d_t, $t=1,\ldots,T$.

(α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα παραγωγής για ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους ως πρόβλημα μ.α.π

(β) Έστω ότι η παραγωγή μπορεί να γίνει το πολύ σε πέντε περιόδους, αλλά χωρίς κάποιες απ' αυτές να είναι διαδοχικές. Πώς αλλάζει το μοντέλο στο (α) με τους νέους περιορισμούς;

Άσκηση 4.4 Θέλετε να κάνετε μετακόμιση. Έχετε n αντικείμε μεγέθους a_j, $j=1,\ldots,n$, που θα μετακινηθούν στο νέο χώρο. Η μετακόμιση θα γίνει με ένα φορτηγό χωρητικότητας Q. Κάθε αντικείμενο πρέπει να μπει σε ένα κουτί. Έχετε αγοράσει m κουτιά μεγέθους b_i, $i=1,\ldots,m$.
Ο ιδιοκτήτης του φορτηγού χρεώνει σταθερή τιμή για κάθε κουτί που τοποθετείται στο φορτηγό ανεξάρτητα από το μέγεθος.

(α) Να μοντελοποιηθεί ένα πρόβλημα α.π. για την ελαχιστοποίηση του κόστους.

β) Τι ρόλο παίζει η παράμετρος Q;

Άσκηση 4.5 Έστω n εργασίες $j=1,\dots,n$, κάθε μία από τις οποίες πρέπει να εκτελεστεί σε μια μοναδική μηχανή. Κάθε εργασία απαιτεί χρόνο επεξεργασίας μιας μέρας. Οι εργασίες θα γίνουν διαδοχικά η μια μετά την άλλη και το πρόβλημα είναι να βρεθεί η σειρά εκτέλεσης. Κάθε εργασία j έχει κόστος c_j, $j=1,\dots,n$, ανά ημέρα καθυστέρησης, δηλαδή αν τελειώσει την ημέρα t θα υπάρχει κόστος ίσο με tc_j. Επίσης υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί προτεραιότητας. Συγκεκριμένα η εργασία 3 δεν μπορεί να γίνει πριν από την εργασία 1, ενώ η εργασία 5 δεν μπορεί να γίνει πριν από την εργασία 2. Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα προγραμματισμού των εργασιών για ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους, ως πρόβλημα α.π.
(Υπόδειξη: Παραλλαγή του προβλήματος ανάθεσης)

Άσκηση 4.6 Έστω ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με εφικτή περιοχή

$$F=\left\{ (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad \text{και} \quad \left(3x_1+2x_2\leq 7 \ \text{ ή } \ 2x_1+3x_2\leq 7\right) \quad \text{και} \quad \left(2x_1+x_2\geq 1 \ \text{ ή } \ x_1+2x_2\geq 1\right) \right\}$$

Να εκφραστεί η F ως σύζευξη περιορισμών.

Άσκηση 4.7 Έστω ένα π.α.π.

$$\max \ \underline{c}'\underline{x}$$
$$\bar{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$
$$0 \le x_j \le u_j \quad , \ j = 1, \dots, n$$
$$x_j \in \mathbb{Z} \quad , \ j = 1, \dots, n$$

Να κατασκευαστεί ένα ισοδύναμο πρόβλημα 0-1 προγραμματισμού.

Άσκηση 4.8 Έστω το π.α.π

$$\max \ x_1 + 2x_2$$
$$-3x_1 + 4x_2 \le 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 11$$
$$2x_1 - x_2 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}.$$

(a) Να λυθεί γραφικά

(b) Να λυθεί με τη μέθοδο κλάδου φράγματος, όπου τα π.γ.π. για κάθε υποπρόβλημα επιλύονται γραφικά.

Άσκηση 4.9 Να λυθεί με τη μέθοδο κλάδου φράγματος το παρακάτω π.α.π., χρησιμοποιώντας στρατηγική κατά εύρος πρώτα

max x_4

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Άσκηση 4.10 Να λυθεί το πρόβλημα της Άσκησης 4.9 με στρατηγική κατά βάθος πρώτα.

Βιβλιογραφία

1. Μηλολιδάκης, Κ. (2003) *"Βασική Θεωρία Βελτιστοποίησης (Σημειώσεις για το Μάθημα Γραμμικός και Μη Γραμμικός Προγραμματισμός)"*.

2. Οικονόμου, Α., Φακίνος, Δ. (2002) *"Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα"*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

3. Bertsimas, D. and Tsitsiklis, J. (1997) *"Introduction to Linear Optimization"*, Athena Scientific, Boston.

4. Nemhauser, G. and Wolsey, (1988) *"Integer and Combinatorial Optimization"*, John Wiley, New York.

5. Padberg, W. (1999) *"Linear Optimization and Extensions"*, Springer, Berlin.

6. Murty, K. (1976) *"Linear and Combinatorial Programming"*, John Wiley, New York.