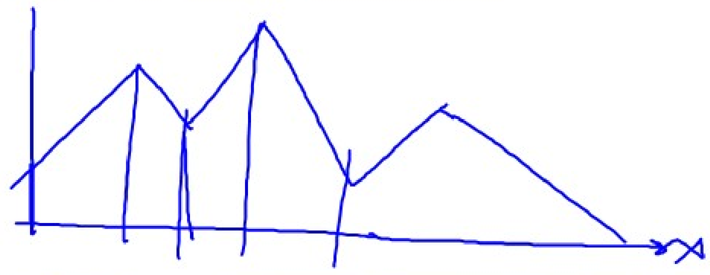
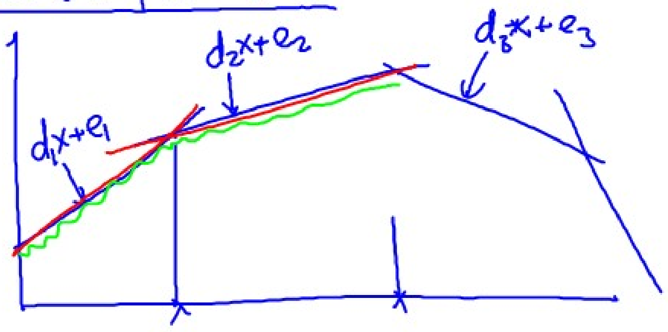
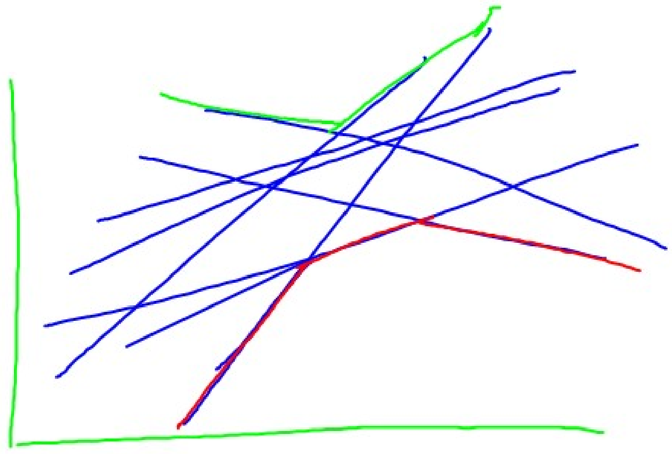
16/3/2011 | Τμηματικά Γραμμικές Αντικ. Συναρτήσεις



Ειδικές Περιπτώσεις





Έστω $f(\underline{x})$ κοίλη τμημ. γραμμική

$$f(\underline{x}) = \min\left\{ \underline{d}_i'\underline{x}+e_i \;,\; i=1,\dots,k \right\} \qquad \begin{matrix} d_1,\dots,d_k \in \mathbb{R}^n \\ e_1,\dots,e_k \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Πρόβλημα

$$Z_{pw} = \max f(\underline{x}) \qquad A\underline{x}=\underline{b} \qquad \underline{x}\geq 0 \iff \text{LP}$$

Παρατήρηση $z=\min(a_1,a_2,\dots,a_k)$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= \max x \\ & x \leq a_i \quad i=1,\dots,k \end{aligned}}$$

Επομένως αν $\boxed{f=\min\left\{\underline{d}_i'\underline{x}+e_i \,,\, i=1,\dots,k\right\}}$

$$\forall \underline{x} \quad f(\underline{x}) = \max y \qquad y \leq d_i'\underline{x}+e_i \quad i=1,\dots,k$$

Θέλω $\max\left\{ f(\underline{x}) : \underline{x}\in F \right\}$

$$\begin{aligned} Z_{LP} = \max_{(y,\underline{x})} \; & y \\ & y \leq d_i'\underline{x}+e_i \;,\; i=1,\dots,k \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

$\boxed{Z_{LP} = Z_{pw}}$ Θεώρημα

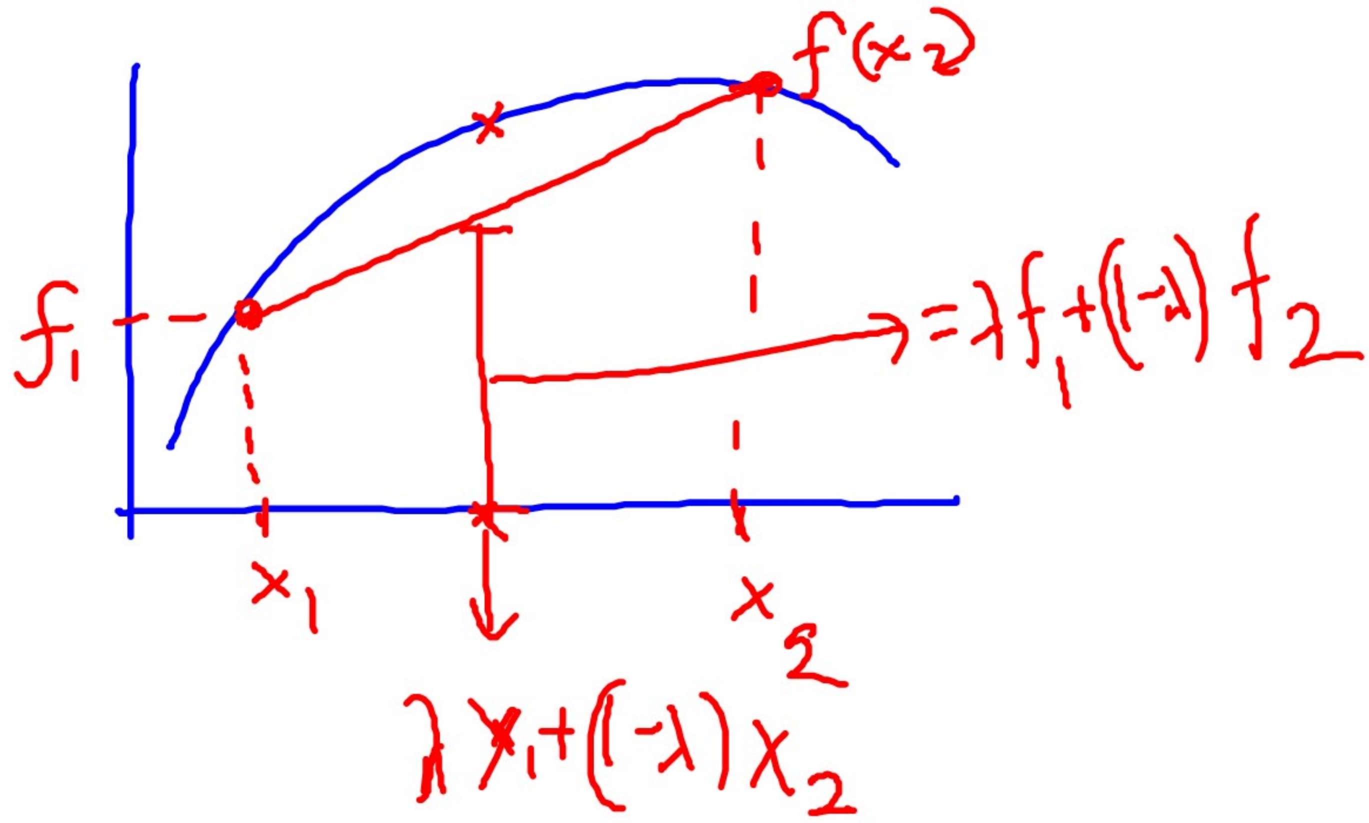
Κοίλη συνάρτηση

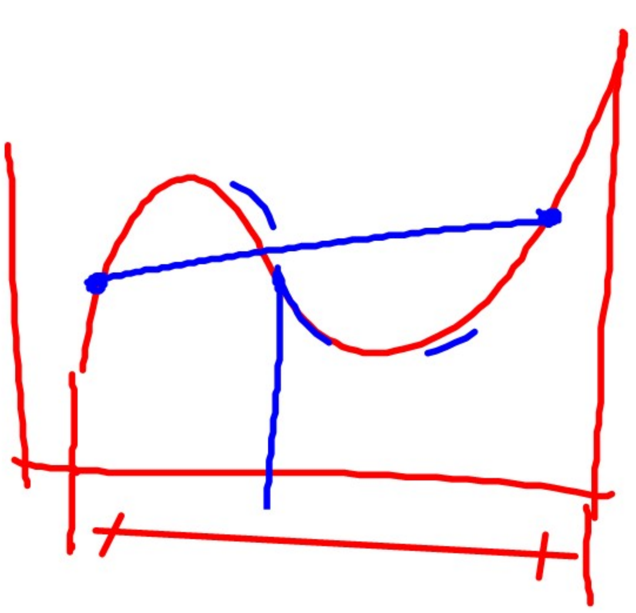
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη [κυρτή $\leq$]

$\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \forall\ \lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

π.χ. για $n=1$





Πρόβλημα προσέγγισης στόχων (goal programming)

<u>Παράδειγμα</u> <u>Πρόβλημα παραγωγής</u> $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ανελαστικοί

<u>περιορισμοί</u> $\left.\begin{array}{l} A\underline{x} = b \\ \underline{x} \geq 0 \end{array}\right] F \neq \emptyset$

στόχοι $\underline{\alpha}_i' \underline{x} = \beta_i \quad i = 1, \ldots, k$

$F' = \emptyset$

→ ελαστικοί

function [A,b,C]=prod(d,h,c,I_0,M)

Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Θεωρία Αποφάσεων
Σειρά Ασκήσεων 1
Παράδοση μέχρι 30 Μαρτίου 2011

$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix}$

h, c, I_0, M

Θέμα 1. Θεωρούμε ένα πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής πολλών περιόδων και ενός μοναδικού προϊόντος. Δίνεται ο ορίζοντας προγραμματισμού N, η ζήτηση d_i και το κόστος αποθήκευσης h_i ανά μονάδα προϊόντος που μεταφέρεται από την περίοδο i στην περίοδο $i+1$, $i = 1, \ldots, N$. Επίσης υποθέτουμε ότι η χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου είναι ίση με M.

(α) Να γραφεί το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδο και παράγει τους πίνακες A, b, c του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

Θέμα 2. Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που παίρνει τα δεδομένα του γενικού προβλήματος διαμετακομιδής σε δίκτυο και επιστρέφει τους πίνακες του π.γ.π. σε κανονική μορφή.

Θέμα 3. Θεωρούμε ένα αυτοκινητόδρομο που διαιρείται σε n μικρότερα τμήματα. Για το φωτισμό του δρόμου θα χρησιμοποιηθούν λάμπες που είναι τοποθετημένες σε m δοσμένα σημεία. Αν η ισχύς της λάμπας στο σημείο j είναι ίση με x_j, $j = 1, \ldots, m$, τότε ο φωτισμός του τμήματος i είναι ίσος με $P_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$, $i = 1, \ldots, m$, όπου a_{ij} γνωστοί συντελεστές. Ο επιθυμητός φωτισμός για το τμήμα i είναι ίσος με k_i (ενώ και ο υπερφωτισμός και ο υποφωτισμός δεν είναι επιθυμητοί). Το πρόβλημα είναι ότι αν $m < n$ τότε γενικά δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ακριβώς ο επιθυμητός φωτισμός σε όλα τα τμήματα του δρόμου.

(α) Αναπτύξτε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδο και παράγει τους πίνακες A, b, c του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή.

Σημείωση: Αν νομίζετε ότι δεν δίνονται όλα τα δεδομένα που χρειάζονται, έχετε δίκιο. Αυτό συμβαίνει συνήθως στα πραγματικά προβλήματα. Κάντε κατάλληλες υποθέσεις και ορίστε τα επιπλέον δεδομένα που θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε.

Θέμα 4. Μια μορφή του προβλήματος πολυωνυμικής παρεμβολής στην αριθμητική ανάλυση ορίζεται ως εξής: Έστω ένα σύνολο σημείων (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, n$ στο επίπεδο. Ζητείται να βρεθεί το πολυώνυμο βαθμού k με $k < n$ που παρεμβάλλεται κατά το πλησιέστερο δυνατό ανάμεσα στα σημεία. Συγκεκριμένα ζητείται να βρεθούν οι συντελεστές $a_0, \ldots, a_k$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$$

να ελαχιστοποιεί τη συνολική απόλυτη απόκλιση

$$D(f) = \sum_{j=1}^{n} |y_i - f(x_i)|$$

πάνω σε όλα τα πολυώνυμα βαθμού k με πραγματικούς συντελεστές.

(α) Αναπτύξτε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για αυτό το πρόβλημα.

(β) Να γράψετε μια συνάρτηση Matlab που δέχεται τα παραπάνω δεδομένα ως είσοδο και παράγει τους πίνακες A, b, c του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή.