Μέθοδος Simplex

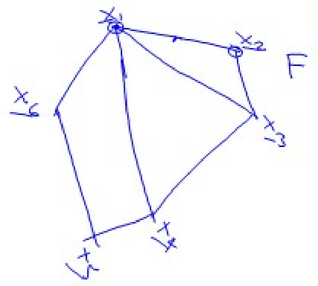
$$\max\ \underline{c}'\underline{x} \qquad b \in \mathbb{R}^m,\ b \geq 0$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ r(A) = m < n$$
$$\underline{x} \geq 0 \qquad \underline{c} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Εφικτή περιοχή $F = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geq 0\}$

Θεώρημα

① F κυρτό πολύεδρο (πεπ. αριθμό ακραίων σημείων ή κορυφών)

Έστω $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ οι κορυφές



② Αν υπάρχει βέλτιστη λύση του ΠΓΠ, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή πού είναι βέλτιστη λύση

③ Βασική Εφικτή Λύση $\Leftrightarrow$ Κορυφή της F

Βασική Εφικτή Λύση: $\underline{x}$

① $\underline{x} \geq 0$, $A\underline{x} = \underline{b}$

② Έστω $I^+(\underline{x}) = \{j = 1, \dots, n : x_j > 0\}$ $\quad \forall \underline{x} \in F$

$I^0(\underline{x}) = \{j : x_j = 0\}$ $\quad \left(I^+(\underline{x}) \cup I^0(\underline{x}) = \{1, \dots, n\}\right)$

Βασική εφικτή λύση $\Leftrightarrow$

$\{\underline{A}_j,\ j \in I^+(\underline{x})\}$: γραμμικά ανεξάρτητα

$A_{I^+(x)}$ = υποπίνακας του A με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

Αν $\underline{x}$ είναι ΒΕΛ $\Rightarrow$ $|I^+(\underline{x})| \leq m$

(i) αν $|I^+(\underline{x})| = m \Rightarrow \underline{x}$ μη εκφυλισμένη ΒΕΛ

(ii) αν $|I^+(x)| < m \Rightarrow \underline{x}$ εκφυλισμένη ΒΕΛ

④ Έστω $\underline{x}$ ΒΕΛ μη εκφυλισμένη

Τότε $B = A_{I^+(\underline{x})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\det(B) \neq 0$

Οι στήλες του B αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^m$

B: ο βασικός πίνακας που αντιστοιχεί στην ΒΕΛ $\underline{x}$

---

⑤ Έστω B βασικός πίνακας του A και έστω $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{x}_B = (x_j, j \in B)$, $\underline{x}_N = (x_j, j \in N)$

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \\ \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{pmatrix} \end{array}\right| \Rightarrow A\underline{x} = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{pmatrix} = B\underline{x}_B + N\underline{x}_N$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = \underline{b} \Rightarrow$$

$$B\underline{x}_B = \underline{b} - N\underline{x}_N \Rightarrow \underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{x}_N$$

αν θέσω $\underline{x}_N = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ βασική λύση

αν $B^{-1}\underline{b} \geq 0$

τότε $\underline{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ είναι ΒΕΛ $\Leftrightarrow$ κορυφή της F

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n \end{pmatrix}$$

$\underline{A}_j$ = j-στήλη του A.

Για ένα $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

$$A_I = (\underline{A}_j, j \in I)$$

(υποπίνακας που αποτελείται από τις στήλες του A με δείκτες στο I)

$$A_I \in \mathbb{R}^{m \times |I|}$$

Έστω Βασικός Πίνακας B με $B^{-1}\underline{b} \geq 0$

Τότε η $\underline{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ είναι ΒΕΛ

Έστω $f(\underline{x}) = \underline{c}'\underline{x}$

$\underline{c}' = (\underline{c}_B' \ \ \underline{c}_N')$

$\Rightarrow \underline{c}'\underline{x} = (\underline{c}_B' \ \ \underline{c}_N')\begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \hline \underline{x}_N \end{pmatrix}$

$= \underline{c}_B'\underline{x}_B + \underline{c}_N \underline{x}_N = \underline{c}_B' B^{-1}\underline{b}$

Είναι η $\underline{x}$ βέλτιστη;

Έστω οποιαδήποτε λύση $\underline{y} \in F$: $A\underline{y} = \underline{b}$, $\underline{y} \geq 0$

$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_B \\ \hline \underline{y}_N \end{pmatrix}$

$A\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow B\underline{y}_B + N\underline{y}_N = \underline{b} \Rightarrow \underline{y}_B = B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{y}_N$

$f(\underline{y}) = \underline{c}' \cdot \underline{y} = \underline{c}_B'\underline{y}_B + \underline{c}_N' \cdot \underline{y}_N =$

$= \underline{c}_B' \cdot \left[B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{y}_N\right] + \underline{c}_N' \cdot \underline{y}_N$

$= \underline{c}_B' \cdot B^{-1}\underline{b} + \underbrace{(\underline{c}_N' - \underline{c}_B' B^{-1} \cdot N)}_{\overline{c}_N'} y_N$

c_B' : $1 \times m$

B^{-1} : $m \times m$

N : $m \times (n-m)$

$$\boxed{f(\underline{y}) = f(\underline{x}) + \overline{c}_N' \cdot y_N}$$

Για να είναι η $\underline{x}$ βέλτιστη

πρέπει $f(\underline{y}) \leq f(\underline{x})$ $\forall \underline{y} \in F \Rightarrow \overline{c}_N' \underline{y}_N \leq 0$ $\forall \underline{y} \in F$

---

(1) Αν $\overline{c}_N \leq 0 \Rightarrow \underline{x}$: βέλτιστη

(2) Αν $\exists j$ $\overline{c}_j > 0 \Rightarrow \underline{x}$ δεν είναι βέλτιστη