8/4/2011

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

ΠΓΠ $z = \max \underline{c}'\underline{x}$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} \geq 0$

$A = (\underline{A}_1\ \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_n)$

Βασικός πίνακας

B υποπίνακας του A

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$B_{m\times m}$ $\det(B) \neq 0$, $\exists B^{-1}$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{pmatrix}$, $A = (B\ \ N)$ $\quad \underline{c} = \begin{pmatrix} \underline{c}_B \\ \underline{c}_N \end{pmatrix}$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow B\underline{x}_B + N\underline{x}_N = \underline{b} \Rightarrow \underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} - B^{-1}N\underline{x}_N$$

Αν $B^{-1}\underline{b} \geq 0$ κ' θέσουμε $\underline{x}_N = 0 \Rightarrow$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$ Βασική Εφικτή Λύση (κορυφή F)

Έστω $\overline{c}' = \underline{c}' - \underline{c}_B' B^{-1} A$ (διάνυσμα ελλατ. κόστους - reduced cost)

$$\overline{c}_j = c_j - \underline{w}'\underline{A}_j = c_j - \underline{c}_B' B^{-1} A_j, \ j = 1, \dots, n$$

$$\underbrace{[\ \underline{c}_B'\ ]_{1\times m} B^{-1}}_{\underline{w}'\ (1\times m)} (\underline{A}_1\ \underline{A}_2 \cdots \underline{A}_n)$$

$$= (\underline{w}'A_1\ \ \underline{w}'\underline{A}_2 \cdots \underline{w}'A_n)$$

Αν A_j είναι μια από τις στήλες του B τότε $\overline{c}_j = 0$

$\overline{c}' = (0\ \ \underline{c}_N' - \underline{c}_B' B^{-1} N)$

$\underline{c}' = (\underline{c}_B'\ \ \underline{c}_N')$

Η λύση $\underline{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ είναι βέλτιστη ανν $\overline{c} \leq 0$

Για οποιαδήποτε εφικτή λύση $\underline{y} \in F$ $\begin{pmatrix} \underline{y} \geq 0 \\ A\underline{y} = \underline{b} \end{pmatrix}$

$$\underline{c}'\cdot\underline{y} = \underline{c}'\cdot\underline{x} + \overline{c}'\cdot\underline{y} = \underline{c}'\underline{x} + \overline{c}_N\cdot\underline{y}_N$$

$$\underline{x}_N = 0$$

Π.χ.

$$A = \Big(A_1 \; \overbrace{A_2 \; A_3} \; A_4 \; A_5 \Big)_{3\times 5} \qquad \underline{A}_j \in \mathbb{R}^3$$

Έστω πχ. $B = (A_1 \; A_3 \; A_4)$

Επομένως $N = (A_2 \, , A_5)$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}_B' = (c_1 \; c_3 \; c_4)$$

Έστω $\bar{c}' = \underline{c}' - \underline{c}_B' B^{-1} A$

$$c_N' = (c_2 \; c_5)$$

$$B^{-1}A = B^{-1}\left(B \;\; N \right) = \Big(\underbrace{B^{-1}B}_{m\times m} \;\; \underbrace{B^{-1}N}_{m\times(n-m)} \Big) \rightarrow m\times n$$

$$B = (A_1 \, A_3 \, A_4)$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \\ 0 & B^{-1}\underline{A}_2 & 1 & 0 & B^{-1}\underline{A}_5 \\ 0 & & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - \underline{c}_B' \cdot B^{-1}\underline{A}_1 = c_1 - (c_1 \, c_3 \, c_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{c}_3 = c_3 - (c_1 \, c_3 \, c_4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \, , \; \underline{\kappa'} \;\; \bar{c}_4 = 0$$

Παράδειγμα

x_1, x_2, x_3 παραγωγή 3 προϊόντων, x_4 = ποσ. 1ου υλικού αχρησιμοπ.

2 πρώτες ύλες σε ποσότητες b_1, b_2 $\quad x_5 = \cdots 2^{ου} \cdots$

c_1, c_2, c_3 : μοναδιαία κέρδη.

$$\max \; c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = b_2$$

$A_{2\times 5}$ $\quad m=2$, $n=5$

Έστω η ΒΕΛ $\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \left[B = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \right]$

κ' έστω

$$\bar{\underline{c}}' = (0 \;\; -2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; -4)$$

1) $\bar{c} \le 0 \Rightarrow \underline{x}$: βέλτιστη

$$z^* = \underline{c}' \cdot \underline{x} = c_1 \cdot x_1 = c_1 \cdot 5$$

2) Ερμηνείες

$x_1 = 5$: παραγωγή 5 μον. πρ. 1

τα πρ. 2, 3 δεν παράγονται

$x_4 = 1 \Rightarrow$ από πρώτη ύλη 1 παραμένει 1 μονάδα αχρησιμ.

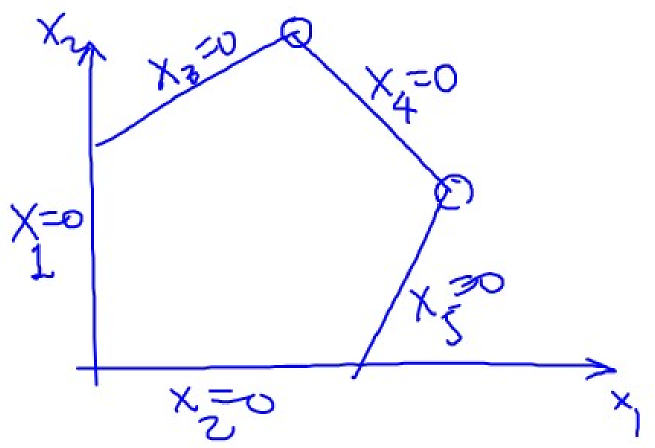
$x_5 = 0 \Rightarrow$ η " " 2 εξαντλήθηκε

3) $\bar{c}' = (0 \;\; -2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; -4)$

$\bar{c}_2 = -2$: Για κάθε εφικτό σχέδιο παραγωγής που αυξάνει την ποσότητα του πρ. 2 από 0 σε θετική, το συνολικό κέρδος μειώνεται κατά 2€ ανά μονάδα παραγωγής του 2.

$\bar{c}_3 = -1$: όμοια

$\bar{c}_5 = -4$: Για κάθε εφικτό σχέδιο παραγωγής που αφήνει 1 μονάδα υλικού 2 αχρησιμοποίητη το κέρδος ελαττώνεται κατά 4€



x^* $\quad z^*$

Function File: [XOPT, FMIN, STATUS, EXTRA] = glpk (C, A, B, LB, UB, CTYPE, VARTYPE, SENSE, PARAM)

Solve a linear program using the GNU GLPK library. Given three arguments, `glpk' solves the following standard LP:

min C'*x

subject to

A*x = b
x >= 0

SENSE → 1 → min
SENSE → -1 → max

but may also solve problems of the form

[min | max] C'*x

subject to

A*x ["=" | "<=" | ">="] b
x >= LB
x <= UB

→ περιορισμοί φράγματος (γενίκευση περιορισμών μη αρνητικότητας)

$$\underline{LB} \le \underline{X} \le \underline{UB}$$

ctype : τύποι περιορισμών.

vtype: για κάθε μεταβλητή "C" continuous (συνεχής)

"I" integer

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_2 \leq 20$$

$$\left(\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 \leq 7, \; x_2 \leq 9, \; x_3 \leq 15 \end{array} \right)$$