Εργασία 2

Για τα προβλήματα της Εργασίας 1·
να επεκταθούν οι αντίστοιχες
συναρτήσεις Matlab/Octave ώστε
να παράγουν κ' τις βέλτιστες λύσεις

Θεωρία Δυικότητας

ΗΚ μορφή

$$Z_P = \max \underline{c}'\underline{x} \qquad \min \underline{c}'\underline{x}$$
$$A\underline{x} \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad A\underline{x} \geq b$$
$$\underline{x} \geq 0 \qquad\qquad \underline{x} \geq 0$$

Hk−max   Hk−min

Δυικό πρόβλημα του Z_P

$$Z_D = \min \underline{b}'\underline{w}$$
$$\underline{w}'A \geq \underline{c}'$$
$$\underline{w} \geq 0$$

Άμεσα δείξαμε ότι $Z_P \leq Z_D$ (ασθενές θεώρημα δυικότητας)

Κανόνες σχηματισμού Δυικού Προβλήματος

Πρωτεύον	Δυϊκό
Μεταβλητές	Περιορισμοί
Συντ. Αντικ. Συν.	Δεξιά Μέρη Περιορ.
max	min
Μεταβλ. ≥ 0	Περιορ. προβλ. φορά αντίθετη
≤ 0	
$\in \mathbb{R}$	Ισότητα

Παράδειγμα

$$Z_1 = \min\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 9 \ (w_1)$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 5 \ (w_2)$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \ (w_3)$$
$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3 \geq 0$$

Δυικό

$$Z_2 = \max\ 9w_1 + 5w_2 + 7w_3$$
$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 3 \ (x_1)$$
$$-w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 5 \ (x_2)$$
$$2w_1 - 4w_2 + w_3 \leq 4 \ (x_3)$$
$$w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$$

Ισχυρό Θεώρημα Δυϊκότητας

Θεώρημα. Αν ένα π.γ.π έχει βέλτιστη λύση τότε κ' το δυϊκό του έχει βέλτιστη λύση κ' ισχύει $z_P = z_D$

Απόδειξη

Εστω ότι το πρόβλημα P είναι σε ΚΜ

$$z_P = \max \underline{c}'\underline{x} \qquad\qquad z_D = \min b'\underline{w}$$
$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad A'\underline{w} \geq \underline{c}$$
$$\underline{x} \geq 0 \qquad\qquad \underline{w} \in \mathbb{R}^m$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{b} \geq 0$, $w \in \mathbb{R}^m$

Εστω ότι το P έχει μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση που είναι βέλτιστη.

Εστω B ο βασικός πίνακας

Τότε $\underline{x}^* = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{pmatrix}$, όπου $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} \geq 0 \in \mathbb{R}^m$, $\underline{x}_N = \underline{0} \in \mathbb{R}^{n-m}$

Αφού B αντιστοιχεί σε βέλτιστη λύση, ικανοποιείται το κριτήριο βελτιστότητας της Simplex, $\bar{c}_j \leq 0 \ \forall j$

δηλαδή $c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \cdot \underline{A}_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$

$$\underline{c}_B' B^{-1} \cdot \underline{A}_j \geq c_j \quad j = 1, \ldots, n$$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{c}_B = m \times 1 \\ \underline{c}_B' = 1 \times m \\ B^{-1} = m \times n \\ \underline{c}_B' B^{-1} = 1 \times m \end{array}}$

Εστω $\underline{y}' = \underline{c}_B' B^{-1} \Rightarrow \underline{y}' \underline{A}_j \geq c_j \ \forall j$

$$\Rightarrow \underline{y}' \left[\underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \cdots \underline{A}_n \right] \geq [c_1 \cdots c_n]$$

$\Rightarrow \underline{y}' \cdot A \geq \underline{c}$ δηλαδή $\underline{y}$ εφικτή λύση του D

Επίσης στο D η τιμή της αντικ. συνάρτησης για τη λύση $\underline{y}$ είναι $\underline{b}'\underline{y} = \underline{y}'\underline{b} = \underline{c}_B' \underbrace{B^{-1}\underline{b}}_{x_B} = \underline{c}_B' \underline{x}_B$

$= \underline{c}_B' \underline{x}_B + \underline{c}_N' \underline{x}_N = \underline{c}' \underline{x}^* = z_P$

$\Rightarrow y$ βέλτιστο για το D !

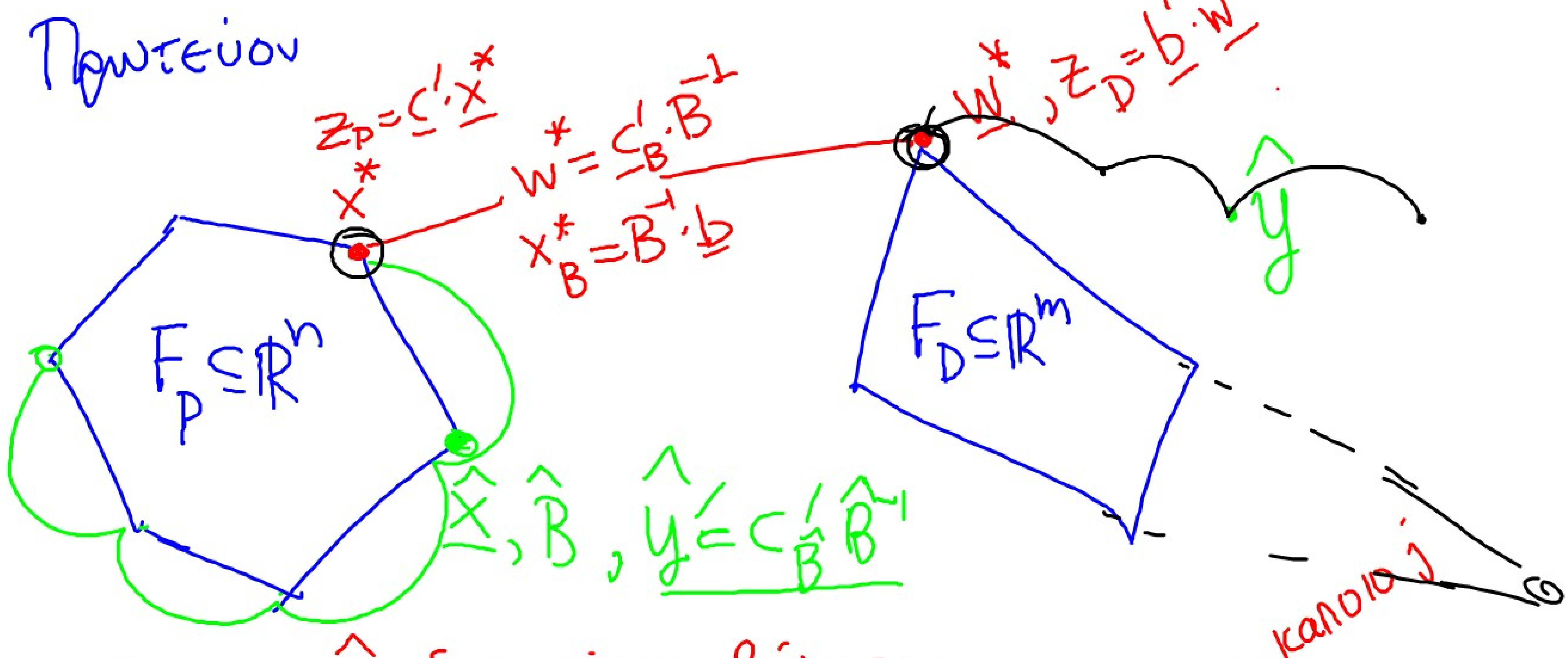
$\Rightarrow \boxed{z_D = z_P}$

Θεώρημα 2

Αν ένα ΠΓΠ είναι μη φραγμένο, τότε τό δυϊκό ΠΓΠ δεν έχει εφικτές λύσεις.

Περιπτώσεις

1. Κ' τα δύο έχουν βέλτιστη λύση, $z_P = z_D$
2. Το ένα μη φραγμένο κ' το άλλο ανέφικτο
3. Και τα δύο ανέφικτα



Έστω ότι η $\hat{\underline{x}}$ δεν είναι βέλτιστη

$\Rightarrow \underline{c}' - \underline{c}_{\hat B}' \hat{B}^{-1} A \not\leq 0$, δηλ. $c_j - \underline{c}_{\hat B}' \hat{B}^{-1} \underline{A}_j > 0$ για κάποιο j

Έστω $\hat{\underline{y}}' = \underline{c}_{\hat B}' \hat{B}^{-1} \Rightarrow c_j - \underline{y}' \underline{A}_j > 0$ για κάποιο j

$\Rightarrow \hat{\underline{y}}$ παραβιάζει τουλάχιστον ένα περιορισμό του D $\Rightarrow \underline{y} \notin F_D$

Θεώρημα Συμπληρωματικότητας

(Υπενθύμιση : $\underline{a}_i' =$ i-γραμμή του A
$\underline{A}_j =$ j-στήλη του A)

$$\max \underline{c}' \cdot x$$
$$A\underline{x} \le b$$
$$\underline{x} \ge 0$$

$A\underline{x} \le b \Leftrightarrow \underline{a}_i' \cdot \underline{x} \le b_i \;, i = 1, \dots, m$

$A'\underline{w} \ge \underline{c} \Rightarrow \underline{w}' \cdot \underline{A} \ge \underline{c}' \Rightarrow \underline{w}' \cdot \underline{A}_j \ge c_j \;, j = 1, \dots, n$

Έστω $u_i = w_i \left(b_i - \underline{a}_i' \cdot x\right) = 0 \;\; \forall i$
$v_j = x_j \left(\underline{w}' A_j - c_j\right) = 0 \;\; \forall j$

Θεωρ. Συμπληρωματικότητας

Έστω $\underline{x}, \underline{w}$ είναι βέλτιστες λύσεις στα αντίστ. προβλ.

$\Rightarrow \underline{x}$ εφικτή στο P $\Rightarrow x_j \ge 0 \;\; \forall j$
$b_i - \underline{a}_i' \cdot \underline{x} \ge 0 \;\; \forall i$

$\underline{w}$ εφικτή στο D $\Rightarrow w_i \ge 0 \;\; \forall i$
$\underline{w}' \cdot \underline{A}_j - c_j \ge 0 \;\; \forall j$

$\Rightarrow u_i \ge 0 \;\; \forall i$
$v_j \ge 0 \;\; \forall j$

Επίσης $\sum_i u_i = \underline{w}' \left(\underline{b} - A\underline{x}\right) = \underline{w}' b - \underline{w}' A \underline{x}$

$\sum_j v_j = \left(\underline{w}' A - \underline{c}'\right) \underline{x} = \underline{w}' A \underline{x} - \underline{c}' \underline{x}$

Επομένως $0 \le \sum u_i + \sum v_j = \underline{w}' \underline{b} - \underline{c}' \underline{x} = 0$

Όμως $\underline{w}' \underline{b} = z_D$
$\underline{c}' \cdot \underline{x} = z_P$ κ' $\underline{z_D = z_P}$