$$z_p = \max \underline{c}' \cdot \underline{x} \qquad A\underline{x} \le \underline{b} \qquad \underline{w} \ge 0$$

$$z_D = \min \underline{b}' \underline{w} \qquad \underline{w}' A \ge c \qquad \underline{w} \ge 0$$

(αν ένα έχει βέλτιστη λύση τότε έχει κ' το άλλο και τότε $z_p = z_D$)

Έστω ότι τα δύο προβλήματα έχουν βέλτιστη λύση

Έστω B ο βασικός πίνακας της β.λ. του z_p

και $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} > 0$ ($\Rightarrow$ βέλτιστη λύση μη εκφυλισμένη)

Έστω $\underline{b}_1 = \underline{b} + \underline{\Delta}$ (όπου $\underline{\Delta}$ "μικρή" διαταραχή)

$\underline{\Delta}$: τ.ω. $B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta}) > 0$

$$z_p(\underline{b}) = \max \underline{c}'\underline{x} \qquad A\underline{x} \le \underline{b} \qquad \underline{x} \ge 0$$

$$z_p(\underline{b}+\underline{\Delta}) = \max \underline{c}'\underline{x} \qquad A\underline{x} \le \underline{b}+\underline{\Delta} \qquad \underline{x} \ge 0$$

Β.Λ. $\underline{x}_B = B^{-1}\underline{b} > 0$ $\qquad$ $\underline{x}_B' = B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta}) > 0$

$B x_B = \underline{b}$ $\qquad$ $B\underline{x}_B' = \underline{b}+\underline{\Delta}$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$ ΒΕΛ του $z_p(\underline{b})$ $\qquad$ $\underline{x}' = \begin{pmatrix} \underline{x}_B' \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ ΒΕΛ του $z_p(\underline{b}+\underline{\Delta})$

$\underline{x}$: βέλτιστη $\Rightarrow$

$$\underline{c}' - \underline{c}_B' B^{-1} A \le 0 \quad (c_j - \underline{c}_B' B^{-1} \underline{A}_j \le 0 \ \forall j)$$

Επομένως ο B αντιστοιχεί σε βέλτιστη ΒΕΛ του $z_p(\underline{b}+\underline{\Delta})$

$$\Rightarrow z_p(\underline{b}) = \underline{c}' \cdot \underline{x} = \underline{c}_B' \cdot B^{-1}\underline{b}$$

$$z_p(\underline{b}+\underline{\Delta}) = \underline{c}' \cdot \underline{x}' = \underline{c}_B' B^{-1}(\underline{b}+\underline{\Delta}) = c_B' B^{-1}\underline{b} + c_B' B^{-1}\underline{\Delta}$$

$$\Rightarrow z_p(\underline{b}+\underline{\Delta}) = z_p(\underline{b}) + \underline{w}'\underline{\Delta}$$

($\underline{w}$ = βέλτιστη λύση του $z_D(\underline{b})$)

$$\Rightarrow z_p(\underline{b}+\underline{\Delta}) = z_p(\underline{b}) + \sum_{i=1}^{m} w_i \Delta_i$$

$$\Rightarrow \frac{z_p(\underline{b}+\underline{\Delta}) - z_p(\underline{b})}{\Delta_i} = w_i, \quad i = 1, \dots, m \quad \Delta_i \text{ "μικρό"}$$

$$w_i = \frac{\partial z_p(\underline{b})}{\partial b_i} \qquad z_p(b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$\underline{w} = \nabla z_p(\underline{b})$$

Οικονομική Ερμηνεία Δυϊκού

Έστω $z_p = \max \underline{c}'\underline{x}$

$A\underline{x} \leq b$

$\underline{x} \geq 0$

n προϊόντα, m πρώτες ύλες

b_i: διαθ. ποσότητα υλικού i, $i=1,\dots,m$

c_j = κέρδος/μον πρ. j

$$z_p = \max c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Για μια μονάδα πρ. j απαιτούνται $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ μονάδες των υλικών

Έστω y_i = τιμή/μον υλικού i στην προσφορά

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}y_1 + \dots \quad a_{mn}y_m \geq c_n$$

Δυϊκό

Ασκηση 3,3

Εστω $A_{n\times n}$ συμμετρικός πινακας κ' $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$

ΠΓΠ $\quad Z_P = \max \underline{c}' \cdot \underline{x}$

$$A\underline{x} \leq \underline{c}$$
$$\underline{x} \geq 0$$

Δ.Ο. αν $\exists \underline{x} : \underline{x} \geq 0,\ A\underline{x} = c \Rightarrow \underline{x}$: βέλτιστη λύση

Αποδ

$$Z_D = \min \underline{c}' \cdot \underline{w} \qquad = \min \underline{c}' \cdot \underline{w}$$
$$A'\underline{w} \geq \underline{c} \qquad\qquad A\underline{w} \geq \underline{c}$$
$$\underline{w} \geq 0 \qquad\qquad \underline{w} \geq 0$$

Εχουμε υποθέσει ότι $\exists\ \underline{x}^0 \in \mathbb{R}^n \cdot A\underline{x}^0 = \underline{c},\ \underline{x}^0 \geq 0$

(i) Η $\underline{x} = \underline{x}^0 \in F_P \Rightarrow Z_P \geq \underline{c}' \cdot \underline{x}_0$

(ii) Η $\underline{w} = \underline{x}^0 \in F_D \Rightarrow Z_D \leq \underline{c}' \cdot \underline{x}_0$

$\Rightarrow Z_D \leq \underline{c}' \underline{x}_0 \leq Z_P$

Απο ασθενή θ.δ. $Z_P \leq Z_D \Rightarrow \boxed{Z_P = Z_D = c' \underline{x}_0}$

Άσκηση Έστω $z_p(\underline{b}) = \max\{\underline{c}'\underline{x} : A\underline{x} \leq b, \underline{x} \geq 0\}$

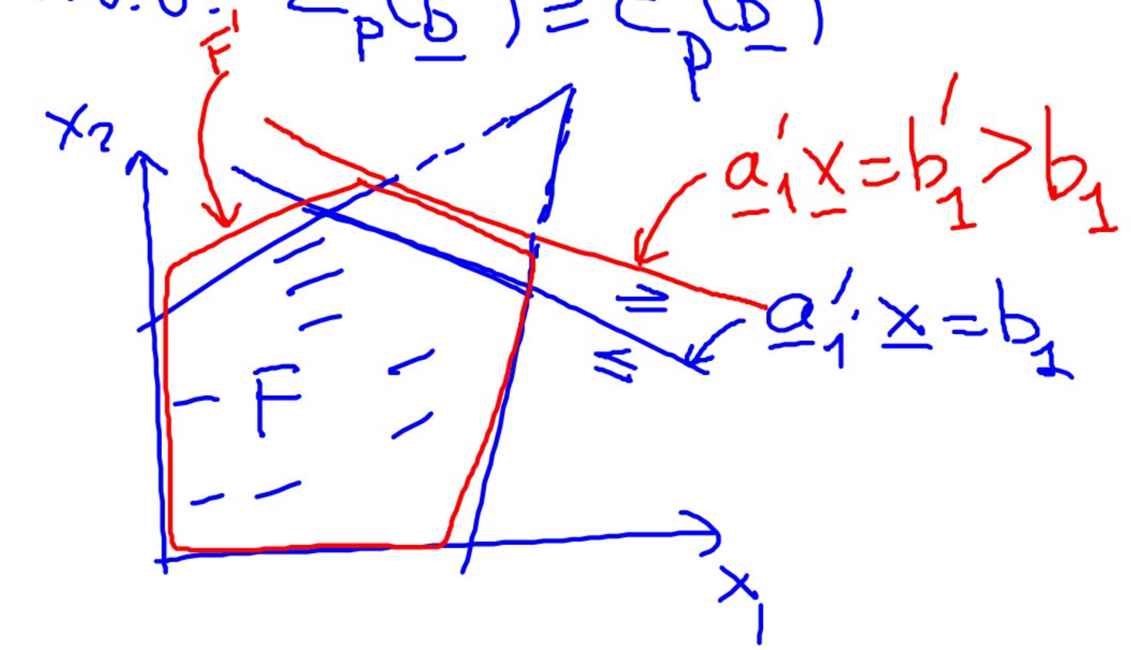
για $\underline{b} \in \mathbb{R}^m : -\infty < z_p(\underline{b}) < \infty$ (δηλ. ∃ βέλτιστη λύση του $z_p(\underline{b})$)

$\boxed{z_p(\underline{b}) : \text{αύξουσα και κοίλη συνάρτηση του } \underline{b}}$

Απόδειξη (i) αύξουσα

Έστω $\underline{b}' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $b_1' > b_1$

ν.δ.ο. $z_p(\underline{b}') \geq z_p(\underline{b})$



$F \subseteq F'$