13/5/2011

Έστω $z(\underline{b}) = \max_{\substack{A\underline{x} \le \underline{b} \\ \underline{x} \ge 0}} \underline{c}' \cdot \underline{x}$

Δείξαμε $z(\underline{b}) \uparrow_{b}$

Τώρα δ.δ.ο. $\boxed{z(\underline{b}) \text{ κοίλη}}$

κοίλη : $\forall\, \underline{b}_1, \underline{b}_2 \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \lambda \in [0,1]$; $-\infty < z(\underline{b}_1), z(\underline{b}_2) < \infty$

$$z(\lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2) \ge \lambda z(\underline{b}_1) + (1-\lambda) z(\underline{b}_2)$$

Απόδειξη Έστω $\underline{b}_1, \underline{b}_2$: $-\infty < z(\underline{b}_1), z(\underline{b}_2) < \infty$, $\lambda \in [0,1]$

$\exists\, \underline{x}^{(1)} \in \mathbb{R}^n : z(\underline{b}_1) = \underline{c}' \cdot \underline{x}^{(1)}$: $A\underline{x}^{(1)} \le \underline{b}_1$, $\underline{x}^{(1)} \ge 0$

$\exists\, \underline{x}^{(2)} \in \mathbb{R}^n : z(\underline{b}_2) = \underline{c}' \cdot \underline{x}^{(2)}$: $A\underline{x}^{(2)} \le \underline{b}_2$, $\underline{x}^{(2)} \ge 0$

$$z(\lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2) = \max_{\substack{A\underline{x} \le \lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2 \\ \underline{x} \ge 0}} \underline{c}'\underline{x} \quad \text{(εξ ορισμού)}$$

Έστω $\overline{\underline{x}}_\lambda = \lambda \underline{x}^{(1)} + (1-\lambda)\underline{x}^{(2)}$

$$\left.\begin{aligned} &A\underline{x}_\lambda = \lambda A\underline{x}^{(1)} + (1-\lambda)A\underline{x}^{(2)} \le \lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2 \\ &\underline{x}_\lambda \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x}_\lambda \in F_{\lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2}$$

Αφού $\underline{x}_\lambda$ εφικτή λύση του $z(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$

$$\Rightarrow \underline{c}' \cdot \underline{x}_\lambda \le z(\lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2)$$

$$\Rightarrow \lambda \underbrace{\underline{c}' \cdot \underline{x}^{(1)}}_{= z(\underline{b}_1)} + (1-\lambda) \underbrace{\underline{c}' \cdot \underline{x}^{(2)}}_{= z(\underline{b}_2)} \le \underline{z(\lambda \underline{b}_1 + (1-\lambda)\underline{b}_2)}$$

Άσκηση Έστω $z(\underline{c}) = \max_{\substack{A\underline{x} \le \underline{b} \\ \underline{x} \ge 0}} \underline{c}' \cdot \underline{x}$

Δ.ο. $z(\underline{c})$: κυρτή συνάρτηση του $\underline{c}$

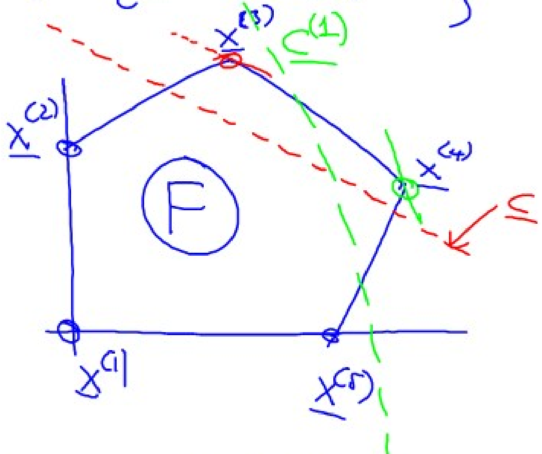
$$z(\lambda \underline{c}_1 + (1-\lambda)\underline{c}_2) \le \lambda z(\underline{c}_1) + (1-\lambda) z(\underline{c}_2)$$

Αν για ένα $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ $-\infty < z(\underline{c}) < \infty \Rightarrow F \ne \emptyset$

$F = \{\underline{x} : A\underline{x} \le \underline{b},\ \underline{x} \ge 0\}$

F κυρτό πολύεδρο

αρ. κορυφών $= K < \infty$



Για $\underline{c}$: $z(\underline{c}) < \infty$

$$z(\underline{c}) = \max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x} \in F\}$$

$$= \max_{i=1,\dots,K} \{\underline{c}' \cdot \underline{x}^{(i)}\}$$

$\underline{x}^{(i)}$: i-κορυφή του F

$$z(\underline{c}) = \max\{\underline{c}' \cdot \underline{x}^{(1)}, \underline{c}' \cdot \underline{x}^{(2)}, \dots, \underline{c}' \cdot \underline{x}^{(K)}\}$$ κυρτή ως max γραμμικών

Παρένθεση

$$f(x)=\max\{2x+5,\ 3x+6\}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Έστω $g(x)=2x+5$

δ.ο. $g(x)$ κοίλη

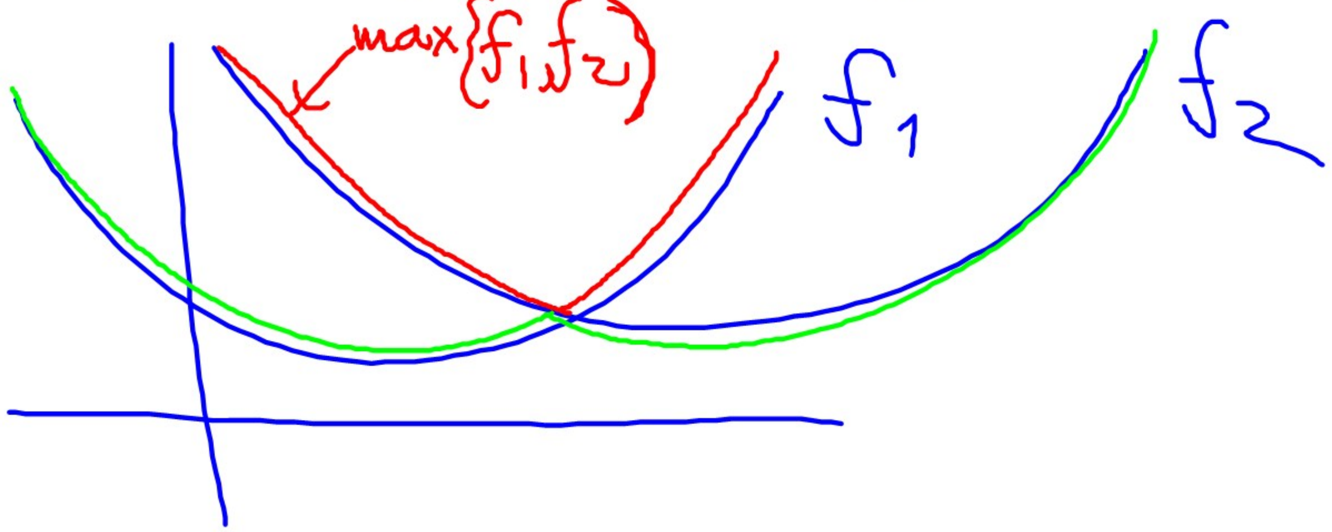
$g(x)$ κυρτή

$$g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$
$$=\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2)$$
$$\forall x_1, x_2, \lambda\in(0,1)$$

---

2. $f_1(x)$, $f_2(x)$ κυρτές

$$f(x)=\max\{f_1(x), f_2(x)\} \Rightarrow f: \text{κυρτή}$$



2^{η} απόδειξη του $z(\underline{b})$ κοίλη

$\forall \underline{b}: z(\underline{b}) < \infty$

$$z(\underline{b}) = \max_{\substack{A\underline{x} \le \underline{b} \\ \underline{x} \ge 0}} \underline{c}'\cdot\underline{x} = \min_{\substack{A'\underline{w} \ge c \\ \underline{w} \ge 0}} \underline{b}'\cdot\underline{w}$$

Έστω $\underline{w}^{(1)}, \underline{w}^{(2)}, \dots, \underline{w}^{(M)}$ κορυφές του $\{A'\underline{w} \ge c,\ \underline{w} \ge 0\}$

$$z(\underline{b}) = \min\{\underline{b}'\underline{w}^{(1)}, \underline{b}'\underline{w}^{(2)}, \dots, \underline{b}'\underline{w}^{(M)}\}$$ κοίλη ως min γραμμικών

Εφαρμογή: Πρόβλημα φόρτωσης σακκιδίου

Έστω $a_j > 0 \ \forall j$

$$z(b) = \max_{\substack{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \le b \\ x_j \ge 0}} c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \min_{\substack{a_1 w \ge c_1 \\ \vdots \\ a_n w \ge c_n \\ w \ge 0}} bw$$

$z(b) \uparrow_b$, κοίλη

$$= \min_{\substack{w \ge c_1/a_1 \\ \vdots \\ w \ge c_n/a_n}} bw$$

$$\Rightarrow z(\underline{b}) = b \cdot \overbrace{\max\left\{\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_2}{a_2}, \dots, \frac{c_n}{a_n}\right\}}^{w^* = \text{β.λ. του } \Delta} = b w^*$$

(Θυμηθείτε $\frac{dz}{db} = w^*$)