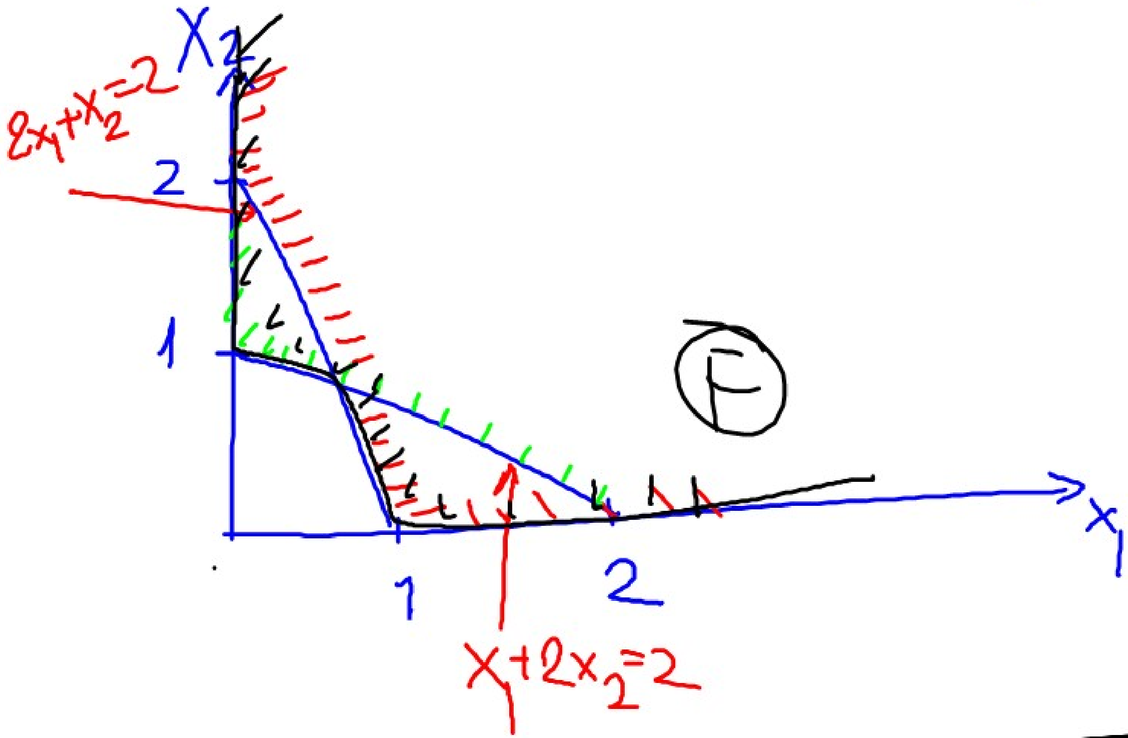
1/6/2011

Προβλήματα με Διαζευκτικούς Περιορισμούς

Π.χ. $\max\ x_1 + x_2$ υ.π. $\underline{x} \in F$ $\quad F = \left\{ (x_1, x_2) \geq 0 : \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ \text{ή} \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \end{array} \right\}$



$2x_1 + x_2 \geq 2 \quad (1)$

ή $x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad (2)$

$y_1 = 1$ (ισχύει ο 1)
$y_2 = 1$ (" ο 2) $\quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 \geq 1$

$$2x_1 + x_2 \geq 2y_1$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2y_2$$

2η περίπτωση

$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad : \quad x_1 + 2x_2 \leq 5y_1$

ή $2x_1 + x_2 \leq 10$

Γενικά $\quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b\,y_1 + 10^{10} \cdot (1 - y_1)$

$y_1 = 0 : \quad \underline{a}'\underline{x} \leq 10^{10} \quad M \ (\to \infty)$

Μεταβλητές με πεπερασμένο σύνολο τιμών

Έστω μια μεταβλητή x_j

τ.ω. $x_1 \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

Έστω $y_j,\ j=1,\dots,k$ | $y_j = 1(x_1 = a_j)$

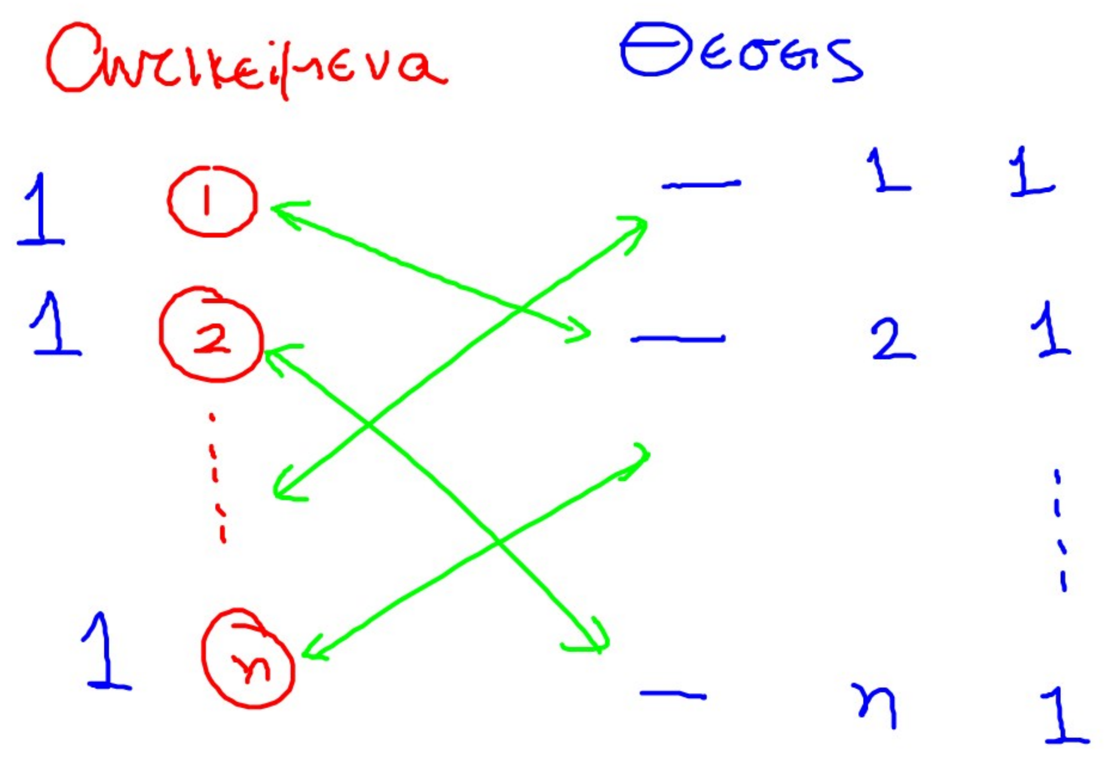
$$\sum_{j=1}^{k} y_j = 1 \qquad x_1 = \sum_{j=1}^{k} a_j y_j$$

Εφαρμογή Έστω ΠΑΠ όπου F φραγμένη

F φραγμένη : $\exists M_1, M_2, \dots, M_n$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x_j \le M_j \quad \forall j \\ x_j \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow x_j \in \{0, 1, 2, \dots, \lfloor M_j \rfloor\}$$

Πρόβλημα Ανάθεσης



c_{ij} = κόστος αν το αντικ. i τοποθετηθεί στη θέση j

itching

x_{ij}: ποσ. από $i \to j$

$x_{ij} = 1$ (αντικ $i \to$ θέση j)

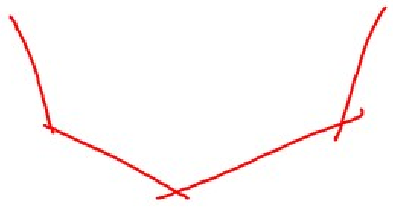
$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n$$

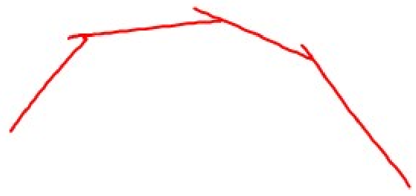
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

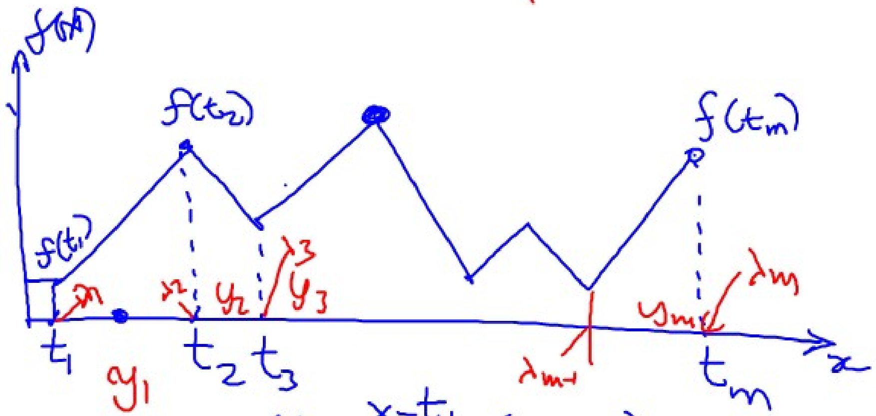
Τμηματικά Γραμμική Αντικ. Συνάρτηση (σε ΠΓΠ;)



min $\Rightarrow$ ΠΓΠ



max $\Rightarrow$ ΠΓΠ



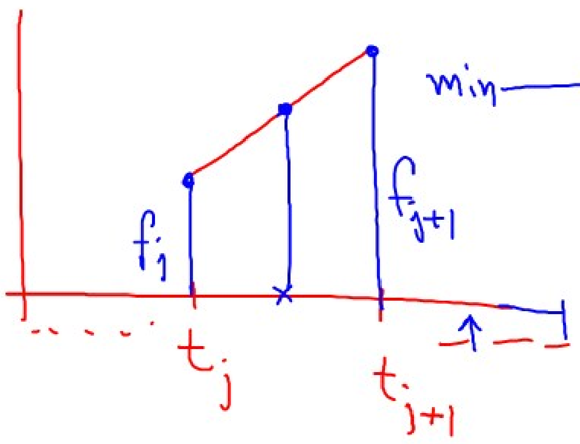
$$\lambda_1 \le y_1$$
$$\lambda_2 \le y_1 + y_2$$
$$\lambda_3 \le y_2 + y_3$$
$$\vdots$$
$$\lambda_m \le y_m$$

$$f(x) = \begin{cases} f(t_1) + \dfrac{x - t_1}{t_2 - t_1}(f_2 - f_1), & x \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ f_{m-1} + \dfrac{x - t_{m-1}}{t_m - t_{m-1}}(f_m - f_{m-1}), & x \in [t_{m-1}, t_m] \end{cases}$$

$$Z = \min\{f(x) : x \in [t_1, t_m]\}$$

$y_j = 1(x \in [t_j, t_{j+1}))$, $j = 1, \dots, m-1$ $\qquad \sum_{j=1}^{m-1} y_j = 1$

$\lambda_1 \cdots \lambda_m$ $\qquad$ Αν $y_j = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \lambda_j t_j + \lambda_{j+1} t_{j+1} \\ \lambda_j + \lambda_{j+1} = 1 \end{array}}$



min $\longrightarrow f(x) = \lambda_j f_j + \lambda_{j+1} f_{j+1}$

$$\lambda_1 \le y_1$$
$$\lambda_j \le y_{j-1} + y_j \quad j = 2, \dots, m-1$$
$$\lambda_m \le y_m$$

Ισοδύναμα:

$$x = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_m t_m$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$$

min $\longrightarrow$ $f(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$ $\longleftarrow$ αντικ. συναρ.

$$\lambda_j \ge 0 \quad \forall j$$
$$\lambda_1 \le y_1$$
$$\lambda_j \le y_{j-1} + y_j, \; j = 2, \dots, m-1$$
$$\lambda_m \le y_{m-1}$$
$$\sum y_j = 1,$$
$$y_j \in \{0, 1\}$$

Η μέθοδος κλάδου-φράγματος (branch and bound)

Εισαγωγή: Χαλαρώσεις – Φράγματα

$$z_1 = \max c'x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

έστω $F_1 = \{x \in \mathbb{Z}^n, x \geq 0, Ax \leq b\}$

Χαλάρωση (relaxation)

$$z_2 = \max \underline{c}'\underline{x}$$
$$\underline{x} \in F_2 \,, \quad F_2 \supseteq F_1$$

Προφανώς $z_1 \leq z_2$

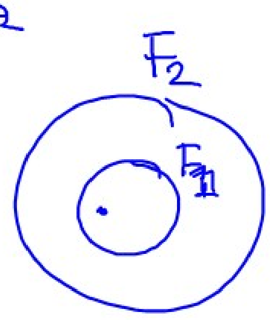
Ιδιότητες

(1) $z_1 \leq z_2$

(2) Έστω x_2^* μια β.λ. του z_2: $z_2 = \underline{c}'\underline{x}_2^*$

αν $\underline{x}_2^* \in F_1 \Rightarrow$ $z_2 = z_1$

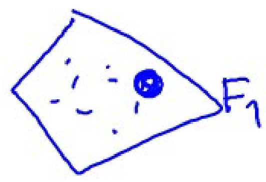
x_2^*: β.λ. του z_1



(3) αν x_2^* β.λ. του z_2 κ' $x_2^* \notin F_1$

Έστω $x_1 \in F_1$ (εφικτή του z_1): έχει βρεθεί

$$\Rightarrow \underline{c}'x_1 \leq z_1 \leq \underline{c}' \cdot x_2^* = z_2$$



π.χ. αν $c' \cdot x_1 = 98$, $z_2 = 100$

$$\Delta = z_1 - \underline{c}' \cdot x_1 \geq 0$$ (υποβελτιστότητα της x_1) (άγνωστη τιμή)

$$0 \leq \Delta \leq \underbrace{z_2 - \underline{c}_1' \underline{x}_1}_{\text{γνωστό}}$$ ← φράγμα υποβελτιστότητας (suboptimality bound)

Σχετικό φράγμα $\dfrac{z_1 - c'x}{z_1}$

$$\Delta \leq z_2 - c'x$$
$$z_1 \geq c'x$$

$$\underbrace{\frac{z_1 - c'x}{z_1}}_{\text{άγνωστο}} \leq \underbrace{\frac{z_2 - c'x}{c'x}}_{\text{γνωστό}}$$

Στο παράδειγμα $0 \leq \Delta \leq 2$

$$\frac{\Delta}{z_1} \leq \frac{2}{98}$$