21/11/24

Η M/M/1 με ομαδικές εξυπηρετήσεις (σταθερού μεγέθους r)

(1) $M/M^r/1$ μοντέλο

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- 1 υπηρέτης που εξυπηρετεί r άτομα μαζί
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- Χωρητικότητα ∞
- FCFS
- Ο υπηρέτης δεν εξυπηρετεί αν υπάρχουν $<r$ άτομα

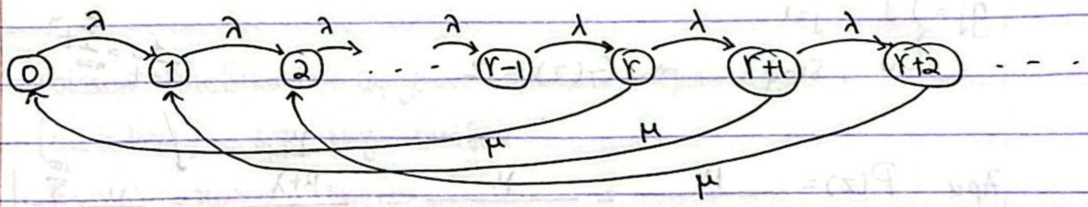
(2) Μαδx;

$Q(t) = \#$ πελατών

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
$0 \le n \le r-1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
$n \ge r$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-r$	$Exp(\mu)$

όλοι Exp $\Downarrow$ $\{Q(t)\}$ Μαδx

(3) Κατανομή Ισορροπίας   Εξισώσεις (πλήρους) Ισορροπίας



$\lambda p_0 = \mu p_r$ ①

$\lambda p_n = \mu p_{n+r} + \lambda p_{n-1}, \quad 1 \le n \le r-1$ ②

$(\lambda+\mu) p_n = \mu p_{n+r} + \lambda p_{n-1}, \quad n \ge r$ ③

(4) Μέθοδος Πιθανογεννητριών

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad |z| \le 1$$

$$① \times z^0 + \sum_{n=1}^{r-1} ② \times z^n + \sum_{n=r}^{\infty} ③ \times z^n \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 + \lambda \sum_{n=1}^{r-1} p_n z^n + (\lambda+\mu) \sum_{n=r}^{\infty} p_n z^n = \mu p_r + \mu \sum_{n=1}^{r-1} p_{n+r} z^n + \mu \sum_{n=r}^{\infty} p_{n+r} z^n +$$

$$+ \lambda \sum_{n=1}^{r-1} p_{n-1} z^n + \lambda \sum_{n=r}^{\infty} p_{n-1} z^n \quad (\Rightarrow)$$

$$(\lambda+\mu)P(z) - \mu\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \frac{\mu}{z^r}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+r} z^{n+r}}_{\substack{\| \\ k=n+r \\ \sum_{k=r}^{\infty} p_k z^k}} + \lambda z \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^{n-1}}_{\substack{\| \\ k=n-1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)P(z) - \mu\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \frac{\mu}{z^r}\left(P(z) - \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n\right) + \lambda z P(z)$$

$$\overset{\cdot z^r}{\Leftrightarrow} \left[(\lambda+\mu)z^r - \mu - \lambda z^{r+1}\right] P(z) = \mu z^r \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n - \mu \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$$

$$\Leftrightarrow P(z) = \frac{\mu \cdot \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n \,(z^r - 1)}{(\lambda+\mu)z^r - \mu - \lambda z^{r+1}}$$

Ιδέα

1) Εξίσωση κανονικοποίησης : $P(1) = 1$

2) $P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ συγκλίνει στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$

Οπότε κάθε ρίζα του $D(z)$ στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ πρέπει να είναι και ρίζα του $N(z)$.

Έστω $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n \,(z^r - 1)}{(\rho+1)\left[z^r - \frac{1}{\rho+1} - \frac{\rho}{\rho+1} z^{r+1}\right]}$$

Χρειαζόμαστε κάποιο θεώρημα υπολογισμού #ριζών στο $\{z : |z| \le 1\}$ συναρτήσεων της μορφής :

$$A(z) = z^N - \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j}_{=a(z)} \quad \text{με } a_j \ge 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \le 1$$

(5) Πόρισμα Θ. Rouché

Θεώρημα: Έστω a_j : $j = 0,1,\ldots$

$$a_j \geq 0 \;,\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j \leq 1 \;,\; \sum_{j=0}^{\infty} j a_j < \infty \;,\; \sum_{j=0}^{\infty} j^2 a_j < \infty$$

Έστω $a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $N \in \{1,2,\ldots\}$ $\quad A(z) = z^N - a(z)$

Έστω $k = \text{ΜΚΔ}\,(j-N : a_j \neq 0)$. Τότε:

Συνθήκη		# ριζών $A(z)$ $\{\lvert z\rvert<1\}$	# ριζών $A(z)$ $\{\lvert z\rvert=1\}$	# ριζών $A(z)$ $\{\lvert z\rvert\leq 1\}$
$a(1)<1$		N	0	N
$a(1)=1$	$A'(1)>0$	$N-k$	k (k-οστές ρίζες της μονάδας)	N
	$A'(1)=0$	$N-k$	$2k$ (διπλές k-οστές ρίζες της μονάδας)	$N+k$
	$A'(1)<0$	N	k (k-οστές ρίζες της μονάδας)	$N+k$

(6) Εφαρμογή του Θ. Rouché στη $M/M^r/1$

Θέτω,

$$a_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho+1} & , j=0 \\ \dfrac{\rho}{\rho+1} & , j=r+1 \\ 0 & , \text{διαφ.} \end{cases} \qquad N=r$$

$k = \text{ΜΚΔ}\,(0-r,\ (r+1)-r) = 1$

$a(1) = 1$

$$A'(z) = r z^{r-1} - \frac{\rho}{\rho+1}(r+1) z^r$$

$$A'(1) = r - \frac{\rho(r+1)}{\rho+1} = \frac{r(\rho+1)-\rho(r+1)}{\rho+1} = \frac{r-\rho}{\rho+1}$$

Περίπτωση 1: $\rho<r \Leftrightarrow \lambda<\mu r$: $a(1)=1$, $A'(1)>0$

Περίπτωση 2: $\rho=r \Leftrightarrow \lambda=\mu r$: $a(1)=1$, $A'(1)=0$

Περίπτωση 3: $\rho>r \Leftrightarrow \lambda>\mu r$: $a(1)=1$, $A'(1)<0$

Περ. 1: $\lambda < \mu r$

Πόρισμα Rouché: $r-1$ ρίζες του $A(z) = z^r - \frac{1}{\rho+1} - \frac{\rho}{\rho+1} z^{r+1}$ στο $\{|z|<1\}$

τη ρίζα $z=1$ και μια ρίζα έστω τη z_0 με $|z_0|>1$.

Οι ρίζες $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ του $A(z)$ στον $\{|z|<1\}$ είναι και ρίζες του αριθμ. της $P(z)$.

Αναγκαστικά είναι ρίζες του $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = c_1(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{r-1})$

Επίσης $A(z) = c_2(z-z_0)(z-1)(z-z_1)\cdots(z-z_{r-1})$

Άρα $P(z) = c \dfrac{z^r-1}{(z-z_0)(z-1)}$

$1 = P(1) = c \dfrac{r}{1-z_0} \Rightarrow c = \dfrac{1-z_0}{r}$

Στην περίπτωση 1: $P(z) = \dfrac{1-z_0}{z-z_0} \cdot \dfrac{z^r-1}{r(z-1)}$

Περ. 2: $\lambda = \mu r$

$\rightarrow \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ έχει r ρίζες στο $\{|z|\leq 1\}$ δηλ $\equiv 0$

όπως περ. 1 (r ρίζες) και διπλή ρίζα $z=1$

Περ. 3: $\lambda > \mu r$

Πορ. Rouché r ρίζες του $A(z) = z^r - \frac{1}{\rho+1} - \frac{\rho}{\rho+1} z^{r+1}$ στο $\{|z|<1\}$

οπότε και πάλι $P(z) = 0$ (αδύνατον).

(7) Μορφή της (p_n)

Όταν $\lambda < \mu r$ (περ. 1)

$$P(z) = \underbrace{\dfrac{1-\frac{1}{z_0}}{1-\frac{z}{z_0}}}_{A(z)} \cdot \underbrace{\dfrac{z^r-1}{r(z-1)}}_{B(z)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n z^n$$

$A(z) \rightsquigarrow$ πιθανογεννήτρια της $Geom\left(\frac{1}{z_0}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{z^r - 1}{r(z-1)} = \frac{1}{r}\cdot z^0 + \frac{1}{r} z^1 + \frac{1}{r} z^2 + \dots + \frac{1}{r} z^{r-1}$$

$B(z) \rightsquigarrow$ πιθανογεννήτρια της $Unif(\{0,1,\dots,r-1\})$

Άρα η (p_n) αντιστοιχεί στο άθροισμα ανεξαρτήτων $Geom\left(\frac{1}{z_0}\right)$, $Unif(\{0,\dots,r-1\})$

Οπότε $p_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{\min(n,r-1)} \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^{n-k}$

$$b_k = \begin{cases} 1/r, & k = 0,1,\dots,r-1 \\ 0, & k = r, r+1, \dots \end{cases}$$