$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n z^n$$

$A(z) \rightsquigarrow$ πιθανογεννήτρια της $Geom\left(\frac{1}{z_0}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \frac{z^r - 1}{r(z-1)} = \frac{1}{r}\cdot z^0 + \frac{1}{r} z^1 + \frac{1}{r} z^2 + \dots + \frac{1}{r} z^{r-1}$$

$B(z) \rightsquigarrow$ πιθανογεννήτρια της $Unif(\{0,1,\dots,r-1\})$

Άρα η (p_n) αντιστοιχεί στο άθροισμα ανεξαρτήτων $Geom\left(\frac{1}{z_0}\right)$, $Unif(\{0,\dots,r-1\})$

Οπότε $p_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\min(n,r-1)} \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^{n-k}$

$$b_k = \begin{cases} 1/r, & k = 0,1,\dots,r-1 \\ 0, & k = r, r+1, \dots \end{cases}$$

<u>Μέθοδος Πιθανογεννητριών</u> <u>26/11/24</u>

(1) <u>Βασική Ιδέα</u>

$q_n p_n = \sum_j p_j q_{jn} \leftarrow$ εξ. ισορροπίας για την n

και $\sum_{n=0}^{\infty} \rightarrow$ εξίσωση για την $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$

Η εξίσωση έχει άγνωστες παραμέτρους (p_0 ή περισσότερα p_j)

– Προσδιορισμός άγνωστων παραμέτρων:

1/ Εξίσωση κανονικοποίησης: $P(1) = 1$

2/ Η $P(z)$ συγκλίνει στον $\{|z| \le 1\}$

π.χ. αν $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ τότε κάθε ρίζα του $D(z)$ στο $\{|z| \le 1\}$ είναι και ρίζα του $N(z)$

(Χρήσιμο το πόρισμα Θ. Rouché)

✱ (στο τέλος) ⟹

(3) Είδη γεννητριών που προκύπτουν

$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ ("ρητή") $P(z) = e^{R(z)}$ ("εκθετική")

Μέθοδος πιθανογεννήτριας

ρυθμοί ανεξ. του n → Αλγεβρική εξίσωση → Ρητή

κάποιοι ρυθμοί γραμμ. ως προς n → Διαφορική εξίσωση → Εκθετική

(4) Χρήσιμες γεννήτριες για αντιστροφή

1| $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad |t|<1$

2| $\frac{1}{(1-t)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a \\ n \end{bmatrix} t^n, \; a \in \{1,2,\dots\} \quad |t|<1$, $\begin{bmatrix} a \\ n \end{bmatrix} = \binom{a+n-1}{n}$

} για ρητή

3| $e^t = \sum \frac{1}{n!} t^n$ } για εκθετική

4| $(g_k : k \geq 1)$ συνάρτηση πιθανότητας μεγέθους ομάδας

$\tilde{g}_n$ = πιθανότητα ένας πελάτης να είναι ο n-οστός.

$= \frac{\sum_{k=n}^{\infty} g_k}{m} \leftarrow \sum_{k=1}^{\infty} k g_k$: μέσο μέγεθος ομάδας

$$\tilde{G}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n z^n = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} g_k z^n = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \underbrace{\sum_{n=1}^{k} z^n}_{= \frac{z(1-z^k)}{1-z}}$$

$$= \frac{z}{m(1-z)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k (1-z^k) = \frac{z(1-G(z))}{m(1-z)}$$

$$\boxed{\tilde{G}(z) = \frac{z(1-G(z))}{m(1-z)}}$$

$\hat{g}_n$ = πιθανότητα να ανήκει ένας πελάτης σε ομάδα μεγέθους n =

(5) Αναδρομικό σχήμα από ρητή. $P(z)$

Βασική Ιδέα: $P(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)} = \dfrac{A(z)}{1-B(z)}$

$$\Rightarrow P(z)(1-B(z)) = A(z)$$

$$\Rightarrow P(z) = A(z) + B(z)P(z)$$

$$\Rightarrow p_n = a_n + \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\, p_k \quad \text{(συνέλιξη)}$$

$$\rightarrow p_n(1-b_0) = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}\, p_k$$

(6) Παράδειγμα

Αναδρομικό σχήμα για (p_n) στην $M^x/M/1$

$$P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda m}{\mu}\right)(1-z)}{\mu-(\lambda+\mu)z+\lambda z G(z)} \overset{\lambda/\mu=\rho}{=}$$

$$= \frac{(1-m\rho)(1-z)}{1-(\rho+1)z+\rho z\cdot G(z)} = \frac{1-m\rho}{1-\dfrac{\rho z(1-G(z))}{1-z}} = \frac{1-m\rho}{1-m\rho\tilde{G}(z)}$$

$$\Rightarrow P(z)(1-m\rho\tilde{G}(z)) = 1-m\rho$$

$$\Rightarrow P(z) = 1-m\rho + m\rho\tilde{G}(z)P(z)$$

$$\Rightarrow p_0 = 1-m\rho + \cancelto{0}{m\rho\tilde{g}_0 p_0}$$

$$p_n = m\rho\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{g}_{n-k}\, p_k \qquad n\geq 1$$

(7) Αναδρομικό σχήμα υπολογισμού για εκθετικές $P(z)$

$$P(z) = e^{R(z)} \xRightarrow{z\cdot\frac{d}{dz}\log} \log P(z) = R(z)$$

$$\Rightarrow \frac{P'(z)}{P(z)} = R'(z)$$

$$\Rightarrow zP'(z) = zR'(z)\cdot P(z)$$

Έχω $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \Rightarrow P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n z^{n-1}$

$\Rightarrow zP'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n z^n$

Όμοια $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n$

$\Downarrow$

$zR'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n r_n z^n$

Άρα, $n p_n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) r_{n-k} p_k$

Άρα: $p_0 = e^{r_0}$

$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) r_{n-k} p_k \quad n \geq 1$

(β) Αναδρομικό σχήμα για $M^x/M/\infty$

$$P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u} du}$$

$$\Rightarrow \log P(z) = -\frac{\lambda}{\mu}\int_z^1 \frac{1-G(u)}{1-u} du$$

$$\Rightarrow \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1-G(z)}{1-z}$$

$$\Rightarrow zP'(z) = \frac{\lambda m}{\mu} \frac{z(1-G(z))}{m(1-z)} P(z)$$

Άρα αν $\rho = \lambda/\mu \leadsto zP'(z) = \rho m \tilde{G}(z) P(z)$

Αναδρομικό σχήμα: $p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}\int_0^1 \frac{1-G(u)}{1-u} du}$

$n p_n = \rho m \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{g}_{n-k} p_k \Rightarrow p_n = \frac{\rho m}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{g}_{n-k} p_k, \ n \geq 1.$

(9) Ασκ. 5.2

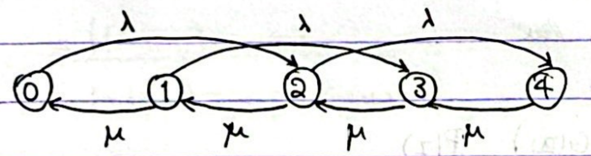
- Poisson αφίξεις ομάδων μεγέθους 2 με ρυθμό λ.
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS

1) $\{Q(t)\}$ Μαρκ; Διάγραμμα
2) $P(z)$ συνάρτηση p_0, λ, μ
3) Συνθήκη ευστάθειας $p_0 = ;$ (όταν ευσταθής)
4) a_n = πιθαν. τοποθ. πελάτη στη n-οστή θέση
5) $\lambda=1$, $\mu=6$. $p_n = ;$ (ακριβής τύπος)

1)

Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Χρόνος
0	2	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+2$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

όλα Exp $\Rightarrow \{Q(t)\}$ Μαρκ



$\lambda p_0 = \mu p_1$ (0)

$(\lambda+\mu) p_1 = \mu p_2$ (1)

$(\lambda+\mu) p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-2}$ (n)

$$(0) \times z^0 + (1) \times z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n) \times z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P(z) - \mu p_0 = \frac{\mu}{z} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1}}_{\sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j} + \lambda z^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} p_{n-2} z^{n-2}}_{\sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu) P(z) - p_0 = \frac{\mu}{z} \left(P(z) - p_0 \right) + \lambda z^2 P(z)$$

$$\Leftrightarrow \left[(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z^3 \right] P(z) = \mu p_0 (z-1) \Leftrightarrow P(z) = \frac{\mu p_0 (z-1)}{(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z^3}$$

$$1 = P(1) = \frac{\mu p_0}{\lambda+\mu-3\lambda} \Leftrightarrow p_0 = 1 - \frac{2\lambda}{\mu}$$

Συνθήκη ευστάθειας : $p_0 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda < \mu$

$$a_n = a_{n-1}^{\text{group}} \tilde{g}_1 + a_{n-2}^{\text{group}} \tilde{g}_2$$

$$\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{PASTA}} = \frac{p_{n-1} + p_{n-2}}{2}$$

Για $\lambda=1$, $\mu=6$:
$$P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{2\lambda}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda z^3} = \frac{4(z-1)}{7z-6-z^3} = \frac{4(z-1)}{6(z-1)-(z^2+z)(z-1)}$$

$$P(z) = \frac{4}{-z^2-z+6} = \frac{4}{-(z+3)(z-2)} = \frac{4}{(3+z)(2-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \quad (*)$$

$(*) \times (2-z)$
$$\Rightarrow A + B\frac{2-z}{3+z} = \frac{4}{3+z} \overset{z=2}{\Rightarrow} A = \frac{4}{5}$$

$(*) \times (3+z)$
$$\Rightarrow A\frac{3+z}{2-z} + B = \frac{4}{2-z} \overset{z=-3}{\Rightarrow} B = \frac{4}{5}$$

Άρα
$$P(z) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2-z} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3+z} = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{3}}$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{4}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{15}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad n=0,1,\dots$$

(10) Ασκήσεις

Ασκήσεις Κεφ. 5.

*

(2) Ανάκτηση των (p_n) από την $P(z)$

$$P(z) \xrightarrow{\text{αντίστροφη}} (p_n)$$

αριθμητική

ή

συμβολική

ακριβής τύπος

αναδρομικό σχήμα