(*)

(2) Ανάκτηση των (p_n) από την $P(z)$

$P(z) \xrightarrow{\text{αντιστροφή}} (p_n)$

αριθμητική

ή

συμβολική

ακριβής τύπος — αναδρομικό σχήμα

28/11/24

Διδιάστατες Μαρκοβιανές Ουρές – Μέθοδος Φάσεων

(1) Βασικές Έννοιες

Σύστημα εξυπηρέτησης με $Q(t) = \#$ πελατών τη στιγμή t

- $\{Q(t)\}$ Μαδχ γέννησης-θανάτου $\Leftrightarrow$ Απλή Μαρκοβιανή Ουρά
- $\{Q(t)\}$ Μαδχ $\Leftrightarrow$ $\{Q(t)\}$ Μαρκοβιανή Ουρά
- $\{Q(t)\}$ όχι Μαδχ αλλά

$\{(Q(t), I(t))\}$ Μαδχ $\Leftrightarrow$ Διδιάστατη Μαρκοβιανή Ουρά

$I(t)$: πληροφορία (πχ. κατάσταση υπηρ., στάδιο άφιξης/εξυπηρέτησης)

(2) Συστήματα εξυπηρέτησης με Erlang χρ. εξυπ. ή ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων

$X \sim Erlang(k, a)$

$\Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^{k} X_i \quad , X_i \sim Exp(a) \quad i=1,2,\dots,k$ ανεξ.

σ.π.π $\quad f_X(x) = \dfrac{a^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-ax} \quad , x>0$

$E[X] = \dfrac{k}{a} \qquad Var[X] = \dfrac{k}{a^2}$

Έστω X χρ. εξυπηρ. σε σύστημα εξυπηρ. με ρυθμό εξυπηρέτησης μ (δηλ. $E[X] = 1/\mu$).

Αν η X είναι Erlang τότε $X \sim Erlang(k, k\mu)$ για κάποιο $k = 1, 2, \ldots$

<u>Ιδέα</u>: Αν έχω $X \sim Erlang(k, k\mu)$ χρ. εξυπηρ. τότε μπορώ να τον σκέφτομαι ως το χρόνο απορρόφησης της

$$\bullet \quad 1 \xrightarrow{k\mu} 2 \xrightarrow{k\mu} 3 \xrightarrow{k\mu} \cdots \xrightarrow{k\mu} k \xrightarrow{k\mu} \cdots \; *$$

1η φάση, 2η φάση, 3η φάση — ολοκλήρωση εξυπηρέτησης

Οπότε αν έχω $I(t)$ = φάση εξυπηρέτησης τότε η $\{(Q(t), I(t))\}$ Μαρκ.

⇝ Η ίδια ιδέα ισχύει για ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων.

(3) <u>Παράδειγμα</u>: Η $M/E_s/1/1$ ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- Erlang $(s, s\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης (ώστε ρυθμός εξυπηρέτησης $= \mu$)
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα: 1

$Q(t)$ = # πελατών

<u>κατάσταση</u>	<u>Επόμενη κατάσταση</u>	<u>Χρόνος</u>
0	1	$Exp(\lambda)$
1	0	Υπολειπόμενος χρόνος από Erlang $(s, s\mu)$

$\{Q(t)\}$ <u>όχι</u> Μαρκ.

Θέτουμε $I(t)$: φάση εξυπηρέτησης πελάτη

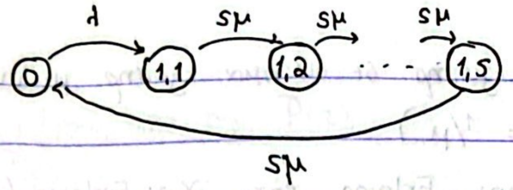
$\{(Q(t), I(t))\}$ με χ.κ $\{0, (1,1), (1,2), \ldots, (1,s)\}$

<u>Τότε</u>,

<u>κατάσταση</u>	<u>Επόμενη κατάσταση</u>	<u>Χρόνος</u>
0	(1,1)	$Exp(\lambda)$
$(1,i)$, $1 \le i \le s-1$	$(1, i+1)$	$Exp(s\mu)$
$(1,s)$	0	$Exp(s\mu)$

$\{(Q(t), I(t))\}$ Μαρκ.

με διάγραμμα:



Έστω $(P_{(n,i)})$ κατανομή ισορροπίας

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_0 &= s\mu\, p_{(1,s)} \\ s\mu\, p_{1,1} &= \lambda p_0 \\ s\mu\, p_{1,1} &= s\mu\, p_{1,i-1} \quad i=1,2,3,\dots,s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad P(1,i) = \frac{\lambda}{s\mu} p_0 \quad i=1,2,\dots,s \quad \text{και} \quad p_0 + \sum_{i=1}^{s} P(1,i) = 1$$

<u>Τελικά</u>: $p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad p(1,i) = \dfrac{\lambda}{s(\lambda+\mu)} \quad i=1,2,\dots$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{s} P(1,i) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

(4) <u>Παράδειγμα</u>: Η $M/E_s/1$ ουρά

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- Erlang$(s, s\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- χωρητ.: ∞
- FCFS

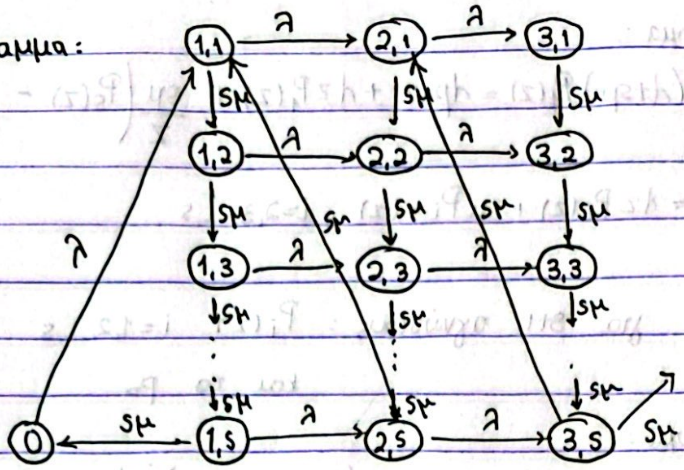
$Q(t)$ = # πελατών

$I(t)$ = φάση εξυπηρέτησης $\qquad \{(Q(t), I(t))\}$:

<u>κατάσταση</u>	<u>Επόμενη κατάσταση</u>	<u>Χρόνος</u>
0	(1,1)	Exp(λ)
(n,i) $n\geq 1$ $1\leq i\leq s-1$	$(n+1, i)$ $(n, i+1)$	Exp(λ) Exp(sμ)
$(1,s)$	$(2,s)$ 0	Exp(λ) Exp(sμ)
(n,s) $n\geq 2$	$(n+1, s)$ $(n-1, 1)$	Exp(λ) Exp(sμ)

$\{(Q(t), I(t))\}$ Μαδχ

με διάγραμμα:



Γενική μέθοδος επίλυσης με πιθανογεννήτριες για διδιάστατες Μαρκοβιανές Ουρές

Για κάθε τιμή της $I(t)$ ορίζει $P_i(z) = \sum_n p(n,i) z^n$, $|z| \leq 1$

και προχωρά ως συνήθως

$$\lambda p_0 = s\mu p(1,s)$$

$$(\lambda + s\mu) p(1,1) = \lambda p_0 + s\mu p(2,s)$$

$$(\lambda + s\mu) p(1,i) = s\mu p(1,i-1) \qquad 2 \leq i \leq s$$

$$(\lambda + s\mu) p(n,1) = \lambda p(n-1,1) + s\mu p(n+1,s), \quad n \geq 2$$

$$(\lambda + s\mu) p(n,i) = \lambda p(n-1,i) + s\mu p(n,i-1), \quad n \geq 2$$

Άρα για $i=1$:

$$\begin{cases} (\lambda + s\mu) p(1,1) z = \lambda p_0 z + s\mu p(2,s) z \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (\lambda + s\mu) p(n,1) z^n = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda p(n-1,1) z^n + \sum_{n=2}^{\infty} s\mu p(n+1,s) z^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + s\mu) \sum_{n=1}^{\infty} p(n,1) z^n = \lambda p_0 z + \lambda z \sum_{n=2}^{\infty} p(n-1,1) z^{n-1} + \frac{s\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} p(n+1,s) z^{n+1}$$

$$(\lambda + s\mu) P_1(z) = \lambda p_0 z + \lambda z P_1(z) + \frac{s\mu}{z} \left(P_s(z) - p(1,s) z \right)$$

Άρα για $i = 2, 3, \dots, s$

$$(\lambda + s\mu) p(1,i) z = s\mu p(1,i-1) z$$

$$+ \quad (\lambda + s\mu) \sum_{n=2}^{\infty} p(n,i) z^n = \lambda \sum_{n=2}^{\infty} p(n-1,i) z^n + s\mu \sum_{n=2}^{\infty} p(n,i-1) z^n$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + s\mu) P_i(z) = \lambda z P_i(z) + s\mu P_{i-1}(z) \qquad i = 2, 3, \dots, s$$

Έχω το σύστημα:

$$(\lambda+s\mu)P_1(z)=\lambda p_0 z+\lambda z P_1(z)+\frac{s\mu}{z}\left(P_s(z)-\frac{\lambda}{s\mu}p_0\right)$$

$$(\lambda+s\mu)P_i(z)=\lambda z P_i(z)+s\mu P_{i-1}(z) \qquad i=2,3,\dots,s$$

↑

s εξισώσεις για s+1 αγνώστους: $P_i(z)$ $i=1,2,\dots,s$

και το p_0

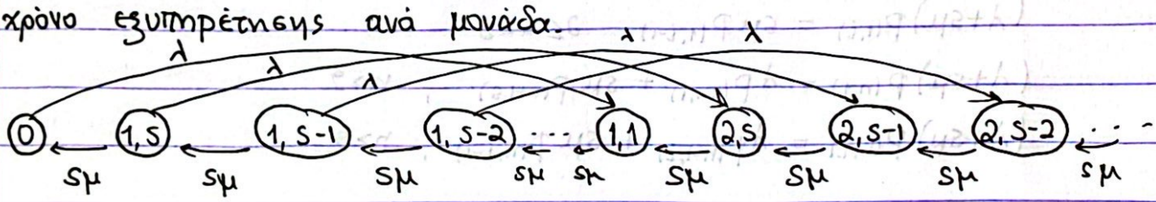
Από εδώ έχουμε:

$$P_i(z)=\frac{s\mu}{\lambda+s\mu-\lambda z}P_{i-1}(z)=\dots=\left(\frac{s\mu}{\lambda+s\mu-\lambda z}\right)^{i-1}P_1(z) \qquad i=2,3,\dots,s$$

οπότε, $(\lambda+s\mu)P_1(z)=\lambda p_0 z+\lambda z P_1(z)+\frac{s\mu}{z}\left(\left(\frac{s\mu}{\lambda+s\mu-\lambda z}\right)^{s-1}P_1(z)-\frac{\lambda}{s\mu}p_0\right)$

⇒ $P_1(z)$ συνάρτηση του p_0 και το p_0 από εξίσωση κανονικοποίησης.

⇝ Πιο εύκολα, το συγκεκριμένο σύστημα εξυπηρέτησης λύνεται βλέποντας κάθε πελάτη σαν ομάδα s ~~ατόμων~~ μονάδων με Exp(sμ) χρόνο εξυπηρέτησης ανά μονάδα.



Το σύστημα είναι ισοδύναμο με μια M/M/1 με ομαδικές αφίξεις μεγέθους s, ρυθμού αφίξεων λ, ρυθμού εξυπηρέτησης sμ.