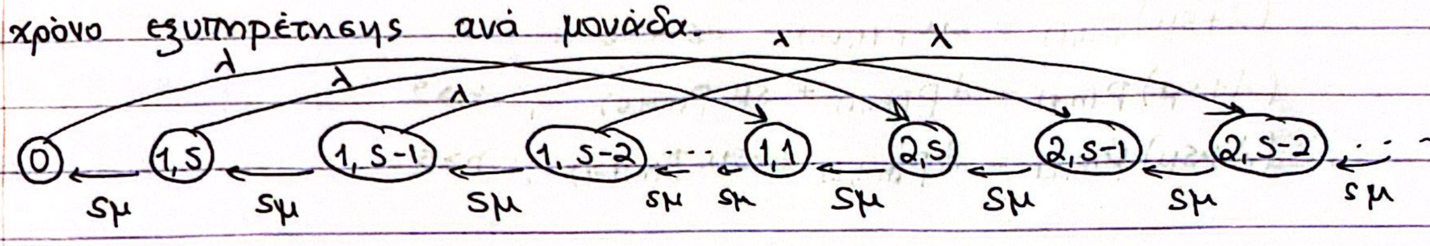
$$P_i(z) = \frac{s\mu}{\lambda+s\mu-\lambda z} P_{i-1}(z) = \ldots = \left(\frac{s\mu}{\lambda+s\mu-\lambda z}\right) P_1(z) \qquad i=2,3,\ldots,s$$

οπότε, $(\lambda+s\mu)P_1(z) = \lambda p_0 z + \lambda z P_1(z) + \frac{s\mu}{z}\left(\left(\frac{s\mu}{\lambda+s\mu-\lambda z}\right)^{s-1} P_1(z) - \frac{\lambda}{s\mu} p_0\right)$

$\Rightarrow P_1(z)$ συνάρτηση του p_0 και το p_0 από εξίσωση κανονικοποίησης.

$\rightsquigarrow$ Πιο εύκολα, το συγκεκριμένο σύστημα εξυπηρέτησης λύνεται βλέποντας κάθε πελάτη σαν ομάδα s ~~ατόμων~~ μονάδων με $Exp(s\mu)$ χρόνο εξυπηρέτησης ανά μονάδα.



Το σύστημα είναι ισοδύναμο με μια M/M/1 με ομαδικές αφίξεις μεγέθους s, ρυθμού αφίξεων λ, ρυθμού εξυπηρέτησης sμ.

Διδιάστατες Μαρκ. Ουρές – Μέθοδος Φάσεων – Μέθοδος Πιθανογεννητριών 03/12/24

(1) Μέθοδος φάσεων – Γενική Ιδέα

Θεώρημα: Αν $X \geq 0$ τ.μ τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει Y τ.μ τύπου φάσεων

$$Y = \begin{cases} Exp(\mu) & \text{με πιθαν. } p_1 \\ Erlang(2,\mu) & p_2 \\ Erlang(3,\mu) & p_3 \\ \vdots & \vdots \\ Erlang(k,\mu) & p_k \end{cases} \qquad \text{ώστε } \sup_y |F_X(y) - F_Y(y)| < \varepsilon$$

Στη μέθοδο των φάσεων όταν έχω γενικούς χρόνους εξυπηρέτησης ή γενικούς ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων τους προσεγγίζω από κατανομή τύπου φάσεων και η διαδικασία $\{(Q(t), I(t))\}$ είναι Μαρκ.

$Q(t)$: # πελατών

$I(t)$: φάση εξυπηρέτησης ή/και άφιξης

(2) Ασκ. 6.2

- $M/E_2/2/2$ ουρά
- Ρυθμός αφίξεων: λ
- Ρυθμός εξυπηρ: μ

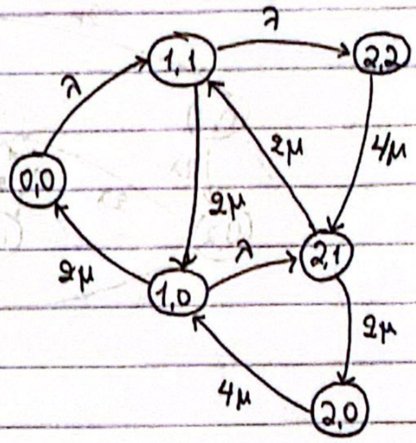
  χρ. εξυπηρ. Erlang$(2, 2\mu)$

P_n = μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου με n πελάτες

↑ (p_n): κατανομή ισορροπίας

$Q(t)$ = # πελατών

$I(t)$ = # πελατών στην 1η φάση εξυπηρ.



χ.κ της $\{Q(t), I(t)\}$

$S = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2)\}$

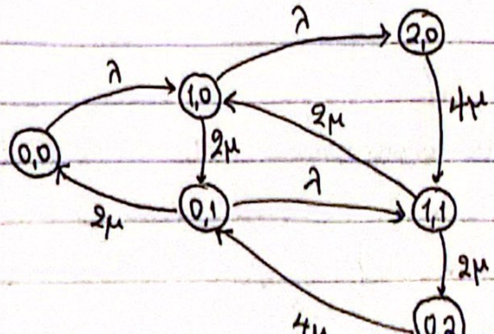
$X = \mathcal{E}xp(2\mu) + \mathcal{E}xp(2\mu)$ ανεξαρτ.

$E[\text{χρ. εξυπηρ.}] = \dfrac{1}{\mu}$

Εναλλακτική Μοντελοποίηση

$Q_1(t)$ = # πελατών στην 1η φάση εξυπηρέτησης

$Q_2(t)$ = # πελατών στη 2η φάση εξυπηρέτησης



(3) Ασκ. 6.5

- $E_2/E_2/1/1$
- Ρυθμός αφίξεων : λ
- Ρυθμός εξυπηρέτησης : μ

⇝ Μαρκοβιανή αναπαράσταση του συστήματος

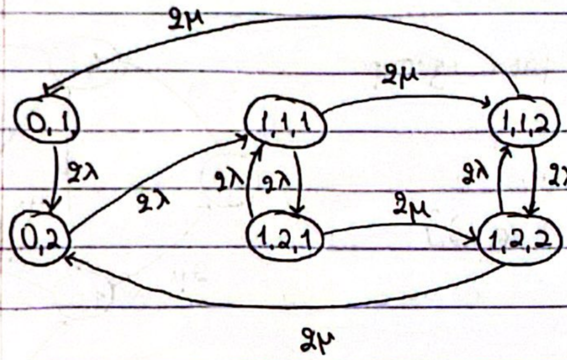
$Q(t)$ = # πελατών

$A(t)$ = φάση άφιξης → ενδ. χρ. αφίξεων Erlang $(2, 2\lambda)$

$S(t)$ = φάση εξυπηρέτησης → χρόνοι εξυπηρ Erlang $(2, 2\mu)$

χ.κ $S = \{(0,1), (0,2), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2)\}$

A(t)   A(t) S(t)



(4) Ασκ. 6.4

- Εκ/Μ/1 ουρά
- Ρυθμός αφίξεων : λ

  Ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων : Erlang $(k, k\lambda)$
- Ρυθμός εξυπηρέτησης : μ

  Χρόνοι εξυπηρέτησης : $Exp(\mu)$

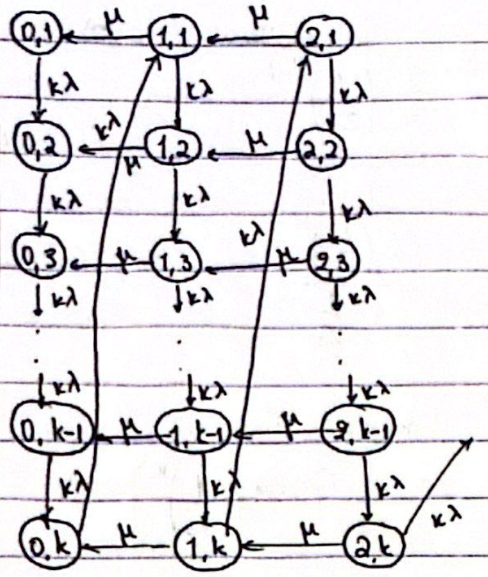
Κατανομή ισορροπίας : # πελατών

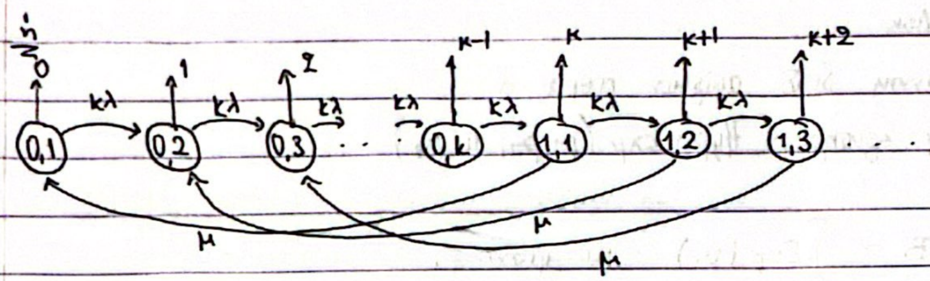
$Q(t)$ = # πελατών

$A(t)$ = φάση πελάτη σε διαδικασία άφιξης

$\{Q(t), A(t)\}$ Μαρκ

χ.κ $S = \{(n, i) : n = 0, 1, 2, \dots, \; i = 1, 2, \dots, k\}$





→ "Ισοδύναμο" με της $M/M^k/1$ αφού με ρυθμό αφίξεων $k\lambda$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ.

Υπενθύμιση: $M/M^r/1$

$$\underset{\lambda}{M}\,/\,\underset{\mu}{M^r}\,/\,1$$

έχει κατανομή ισορροπίας $q_n = \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^n \quad n=0,1,\ldots$

όπου z_0 είναι η μοναδ. ρίζα του $z^r - \frac{1}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho} z^{r+1} = 0$ με μέτρο > 1.

⇒ Άρα για το υπό εξέταση σύστημα:

$$p(n,i) = \left(1-\frac{1}{z_0}\right)\left(\frac{1}{z_0}\right)^{nk+i-1}$$

όπου z_0 η μοναδ. ρίζα με μέτρο >1 του $z^k - \underbrace{\frac{1}{1+\frac{k\lambda}{\mu}}}_{=\frac{\mu}{\mu+k\lambda}} - \frac{k\lambda}{\mu+k\lambda} z^{k+1} = 0$

Άρα το μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που υπάρχουν n πελάτες είναι:

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} P(n,i) = \left(1-\frac{1}{Z_0}\right)\left(\frac{1}{Z_0}\right)^{nk} \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{Z_0}\right)^{i-1}}_{\frac{1-\left(\frac{1}{Z_0}\right)^{k}}{1-\frac{1}{Z_0}}}$$

Άρα $p_n = \left(1-\left(\frac{1}{Z_0}\right)^{k}\right)\left[\left(\frac{1}{Z_0}\right)^{k}\right]^{n}$ $\quad n=0,1,\dots$

$\text{Geom}\left(\left(\frac{1}{Z_0}\right)^{k}\right)$

(5) Άσκ.

- Poisson διαδ. αφίξεων ρυθμού λ
- Χρ. εξυπηρ. ~ HyperExp $(p_1, p_2; \mu_1, \mu_2)$

$$B \sim \begin{cases} Exp(\mu_1) : \text{με πιθαν. } p_1 \\ Exp(\mu_2) : \text{με πιθαν. } p_2 \end{cases}$$

- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα $\rightsquigarrow$ Μαρκοβιανή Αναπαράσταση
- FCFS

$Q(t)$ = # πελατών

$I(t)$ = "Είδος" πελάτη που εξυπηρετείται

π.χ. $S = \{0, (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), \dots\}$