Διδιάστατες Μαρκ Ουρές - Μέθοδος Πιθανογεννητριών

05/12/24

(1) Μέθοδος

$\{(Q(t), I(t))\}$ Μαοχ

$Q(t)$: #πελατών, $I(t)$: επιπλέον πληροφορίες (πχ. φάση εξυπηρέτησης/άφιξης, κατάσταση υπηρ. κλπ)

$(p(n,i) : n \geq 0 \quad i \in I(n))$: κατανομή ισορροπίας

Για κάθε $i = \bigcup_{n=0}^{\infty} I(n)$

$P_i(z) = \sum p(n,i) z^n \quad |z| \leq 1$

$\sum_n$ εξίσωση ισορροπίας για την $(n,i) \times z^n$

$\rightsquigarrow$ εξίσωση για την $P_i(z)$

Τελικά σύστημα για τις $P_i(z)$

κλπ κλπ (αντιστροφή όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση)

(2) M/M/1 ουρά με χρόνους επανεκκίνησης

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- $Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS
- Άδειο σύστημα $\rightsquigarrow$ Απενεργοποιημένος υπηρέτης

  Άφιξη σε άδειο σύστημα $\rightsquigarrow$ Έναρξη διαδικασίας επανεκκίνησης χρόνοι $\sim Exp(\theta$

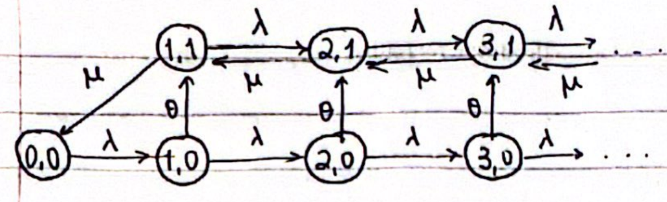
$Q(t) =$ # πελατών τη στιγμή t

$I(t) =$ κατάσταση συστήματος τη στιγμή t.

$\{Q(t), I(t)\}$

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
$(0,0)$	$(1,0)$	$Exp(\lambda)$
$(n,0)$ $n \geq 1$	$(n+1,0)$	$Exp(\lambda)$
	$(n,1)$	$Exp(\theta)$
$(1,1)$	$(2,1)$	$Exp(\lambda)$
	$(0,0)$	$Exp(\mu)$
$(n,1)$ $n \geq 2$	$(n+1,1)$	$Exp(\lambda)$
	$(n-1,1)$	$Exp(\mu)$

$\{Q(t), I(t)\} \Rightarrow$ Μαοχ.



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\lambda P(0,0) = \mu P(1,1) \quad (1)$$

$$(\lambda+\theta) P(n,0) = \lambda P(n-1,0) \quad (2) \quad n \geq 1$$

$$(\lambda+\mu) P(1,1) = \theta P(1,0) + \mu P(2,1) \quad (3)$$

$$(\lambda+\mu) P(n,1) = \theta P(n,0) + \mu P(n+1,1) + \lambda P(n-1,1) \quad (4) \quad n \geq 2$$

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,0) z^n \quad |z| \leq 1 \qquad P_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n,1) z^n \quad |z| \leq 1$$

$$(1) \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2) \times z^n \Rightarrow \lambda P(0,0) + (\lambda+\theta) \sum_{n=1}^{\infty} P(n,0) z^n = \mu P(1,1) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P(n-1,0) z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\theta) P_0(z) - \theta P(0,0) = \overbrace{\mu P(1,1)}^{\overset{(1)}{=} \lambda P(0,0)} + \lambda z P_0(z)$$

$$\Rightarrow P_0(z) = \frac{\mu P(1,1) + \theta P(0,0)}{\lambda+\theta-\lambda z} = \frac{(\lambda+\theta) P(0,0)}{\lambda+\theta-\lambda z}$$

$$(3) \times z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (4) \times z^n \Rightarrow$$

$$(\lambda+\mu) P(1,1) z + (\lambda+\mu) \sum_{n=2}^{\infty} P(n,1) z^n = \theta P(1,0) z + \theta \sum_{n=2}^{\infty} P(n,0) z^n + \mu P(2,1) z +$$

$$+ \mu \sum_{n=2}^{\infty} P(n+1,1) z^n + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} P(n-1,1) z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P_1(z) = \theta \left(P_0(z) - P(0,0) \right) + \frac{\mu}{z} \left(P_1(z) - P(1,1) z \right) + \lambda z P_1(z)$$

$$\Rightarrow \left(\lambda+\mu - \frac{\mu}{z} - \lambda z \right) P_1(z) = \theta P_0(z) - \theta P(0,0) - \mu P(1,1) \overset{(1)}{=} \lambda P(0,0)$$

$$\Rightarrow \left[(\lambda+\mu) - \frac{\mu}{z} - \lambda z \right] P_1(z) = \theta P_0(z) - (\theta+\lambda) P(0,0)$$

$$\overset{\text{Εισ. } P_0(z)}{\Longrightarrow} \left[(\lambda+\mu) - \frac{\mu}{z} - \lambda z \right] P_1(z) = \frac{\theta (\lambda+\theta) P(0,0)}{\lambda+\theta-\lambda z} - (\lambda+\theta) P(0,0)$$

$$\overset{\times z}{\Rightarrow} \left[(\lambda+\mu)z - \mu - \lambda z^2\right] P_1(z) = (\lambda+\theta)\, p(0,0)\, z \left(\frac{\theta}{\lambda+\theta-\lambda z} - 1\right) =$$

$$= (\lambda+\theta)\, p(0,0)\, z \, \frac{\theta-\lambda-\theta+\lambda z}{\lambda+\theta-\lambda z} = \frac{\lambda(\lambda+\theta)\, p(0,0)\, z\,(z-1)}{\lambda+\theta-\lambda z}$$

$$\Rightarrow P_1(z) = \frac{\lambda(\lambda+\theta)\, p(0,0)\, z\,(z-1)}{(\lambda+\theta-\lambda z)\left[\underbrace{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda z^2}_{(\mu-\lambda z)(z-1)}\right]}$$

$$P_1(z) = \frac{\lambda(\lambda+\theta)\, p(0,0)\, z}{(\lambda+\theta-\lambda z)(\mu-\lambda z)}$$

Εξίσωση κανονικοποίησης: $P_0(1) + P_1(1) = 1 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\lambda+\theta}{\theta} + \frac{\lambda(\lambda+\theta)}{\theta(\mu-\lambda)}\right) p(0,0) = 1 \Rightarrow$$

$$p(0,0) = \frac{\theta(\mu-\lambda)}{(\lambda+\theta)\mu}$$

Τελική μορφή πιθανογεννητριών

$$P_0(z) = \frac{\theta(\mu-\lambda)}{\mu(\lambda+\theta-\lambda z)} = \frac{\theta(\mu-\lambda)}{(\lambda+\theta)\mu\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\theta}z\right)}$$

$$P_1(z) = \frac{\lambda\theta(\mu-\lambda)z}{\mu(\lambda+\theta-\lambda z)(\mu-\lambda z)} = \frac{\lambda\cdot\theta(\mu-\lambda)\, z}{\mu(\lambda+\theta)\mu\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\theta}z\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}z\right)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$$

$$P_0(z) = (1-\sigma)(1-\rho)\frac{1}{1-\sigma z}, \quad P_1(z) = (1-\sigma)(1-\rho)\rho\frac{z}{(1-\sigma z)(1-\rho z)}$$

Αντιστροφή: $\sum_{n=0}^{\infty} p(n,0) z^n = P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\sigma)(1-\rho)\sigma^n z^n$

$\Rightarrow p(n,0) = (1-\sigma)(1-\rho)\sigma^n \ , \ n=0,1,2,\dots$

Περίπτωση 1: $\sigma \neq \rho \iff \lambda+\theta \neq \mu$

$$P_1(z) = \frac{A}{1-\sigma z} + \frac{B}{1-\rho z}$$

$$A = \lim_{z\to \frac{1}{\sigma}} P_1(z)(1-\sigma z) = \frac{(1-\sigma)(1-\rho)\rho}{\sigma-\rho}$$

$$B = \lim_{z\to \frac{1}{\rho}} P_1(z)(1-\rho z) = \frac{(1-\sigma)(1-\rho)\rho}{\rho-\sigma}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n,1) z^n = \frac{(1-\sigma)(1-\rho)\rho}{\sigma-\rho}\left(\frac{1}{1-\sigma z} - \frac{1}{1-\rho z}\right)$$

$$\Rightarrow p(n,1) = \frac{(1-\sigma)(1-\rho)\rho}{\sigma-\rho}(\sigma^n-\rho^n) \quad n=1,2,\dots$$

$$(1-t)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} a \\ n\end{bmatrix} t^n$$
$$\begin{bmatrix} a \\ n\end{bmatrix} = \binom{a+n-1}{n}$$

Περίπτωση 2: $\sigma = \rho \iff \lambda+\theta=\mu$

$$P_1(z) = (1-\rho)^2\rho \frac{z}{(1-\rho z)^2} = (1-\rho)^2\rho z \sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} 2 \\ n\end{bmatrix}\rho^n z^n =$$

$$= (1-\rho)^2\rho z \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{2+n-1}{n}}_{n+1}\rho^n z^n$$

$\Rightarrow p(n,1) = (1-\rho)^2\rho^n \cdot n \ , \ n\geq 1$

(3) Η M/M/1 με επαναπροσπάθειες

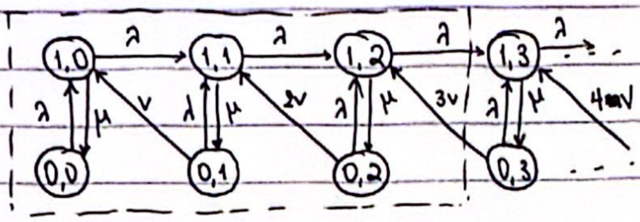
- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρ.
- 1 υπηρέτης
- χωρητικότητα 1

- οι πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη κατειλ. επαναπροσπαθούν κάθε $Exp(\nu)$

$Q(t)$ = # πελατών στο σύστημα τη στιγμή t

$R(t)$ = # πελατών σε τροχιά επαναπροσπ. τη στιγμή t.

$\{(Q(t), R(t))\}$



1η Λύση ~ Βιβλίο => Πιθανογεννήτριες

2η Λύση ~ Εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας

$A_n = \{(0,n)\} \quad n \geq 0$

$$\hookrightarrow (\lambda + n\nu)\, p(0,n) = \mu\, p(1,n) \qquad n \geq 0$$

$B_n = \{(i,k) : i = 0,1 \quad k = 0,1,2,\dots,n\} \quad n \geq 0$

$$\hookrightarrow \lambda\, p(1,n) = (n+1)\nu\, p(0,n+1) \quad , n \geq 0 \qquad \lambda\, p(1,n-1) = n\nu\, p(0,n) \quad , n \geq 1$$

$$p(1,n) = \frac{\lambda + n\nu}{\mu}\, p(0,n) \quad , n \geq 0$$

$$p(0,n) = \frac{\lambda}{n\nu}\, p(1,n-1) \quad , n \geq 1$$

$$p(0,n) = \frac{\lambda(\lambda + (n-1)\nu)}{n\nu \quad \mu}\, p(0,n-1)$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad p(0,n) = \left(\frac{\lambda}{\mu\nu}\right)^n \frac{1}{n!} [\lambda + (n-1)\nu][\lambda + (n-2)\nu] \cdots \lambda\, p(0,0) \qquad n \geq 0$$

$$p(1,n) = \frac{\lambda + n\mu}{\mu}\, p(0,n) \quad , n \geq 0$$