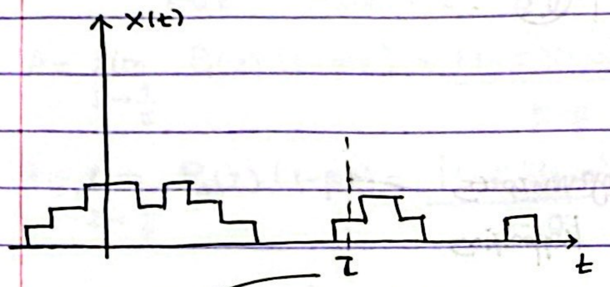
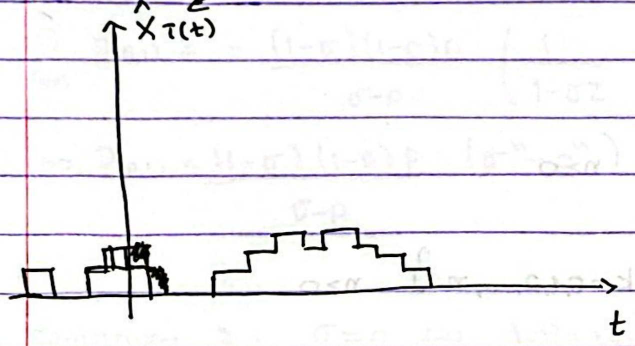
Αντιστρεψιμότητα και Συστήματα Εξυπηρέτησης 10/12/24

(1) Αντίστροφη στοχαστικής διαδικασίας

Ορισμός: Έστω $\{X(t): t\in\mathbb{R}\}$ στοχαστική διαδικασία και $\tau\in\mathbb{R}$. Η $\{\hat{X}_\tau(t): t\in\mathbb{R}\}$ με $\hat{X}_\tau(t) = X(\tau - t)$, $t\in\mathbb{R}$ λέγεται αντίστροφη της $\{X(t)\}$ με κέντρο τ.

$\tau = 0 \rightsquigarrow \{\hat{X}(t) = \hat{X}_0(t): t\in\mathbb{R}\}$ τυπική αντίστροφη





Διαίσθηση

Η εξέλιξη της $\{\hat{X}_\tau(t)\}$ είναι η εξέλιξη της $\{X(t)\}$ αντίστροφα στο χρόνο.

(2) Αντιστρέψιμες στοχαστικές διαδικασίες

Ορισμός: Έστω $\{X(t): t\in\mathbb{R}\}$ στοχ. διαδ. και $\tau\in\mathbb{R}$. Η $\{X(t)\}$ λέγεται αντιστρέψιμη αν $\{X(t): t\in\mathbb{R}\}$ στοχ. ισοδύναμη με την $\{\hat{X}_\tau(t): t\in\mathbb{R}\}$ δηλ. $\forall t_1 < t_2$

$(X(t_1), \dots, X(t_n)) \overset{d}{=} (\hat{X}_\tau(t_1), \dots, \hat{X}_\tau(t_n))$.

Διαίσθηση: Η εξέλιξη της $\{X(t)\}$ έχει την ίδια πιθανοθεωρητική συμπεριφορά ως προς τις δύο φορές του χρόνου.

(3) Αντίστροφη Μαρκ

Θεώρημα: Έστω $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη, στάσιμη Μαρκ με κατανομή ισορροπίας (p_j) και πίνακα ρυθμών $Q = (q_{ij})$. Η αντίστροφη της $\{\hat{X}(t)\}$ είναι επίσης αδιαχώριστη, στάσιμη Μαρκ με κατανομή ισορροπίας $(\hat{p}_j)$ και πίνακα $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij})$ όπου:

$$\hat{p}_j = p_j$$
$$\hat{q}_{ji} = \frac{p_i}{p_j} q_{ij}$$

Διαισθητικά

1| $\{\hat{X}(t)\}$ Μαρκ : $\{X(t)\}$ Μαρκ

$\Rightarrow$ Δοθέντος του $X(t)=j$, $\{X(u): u<t\}$, $\{X(u): u>t\}$ ανεξάρτητα

$\Rightarrow$ Δοθέντος του $\hat{X}(-t)=j$

$\{\hat{X}(-u): -u<t\}$, $\{\hat{X}(-u): -u>t\}$ ανεξάρτητα

$\{\hat{X}(u): u>-t\}$, $\{\hat{X}(u): u<-t\}$ ανεξάρτητα

2| $\{\hat{X}(t)\}$ αδιαχώριστη

$\{X(t)\}$ αδιαχώριστη

$\Rightarrow \forall\ i,j \quad \exists\ t,s>0: \quad p_{ij}(t)>0\ ,\ p_{ji}(s)>0$

$\Rightarrow \hat{p}_{ji}(t)>0\ ,\ \hat{p}_{ij}(s)>0$

$\Rightarrow \{\hat{X}(t)\}$ αδιαχώριστη

3| $\{\hat{X}(t)\}$ στάσιμη

4| $\hat{p}_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[\hat{X}(t)=j] = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(-t)=j] = p_j$

5| $p_i q_{ij}$ = Μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων $i\to j$ στην $\{X(t)\}$.

$\hat{p}_j \hat{q}_{ji}$ Μακροπρόθεσμος ρυθμός μεταβάσεων $j\to i$ στην $\{\hat{X}(t)\}$.

Άρα $\hat{q}_{ji} = \dfrac{p_i q_{ij}}{\hat{p}_j} \underset{\hat{p}_j=p_j}{\uparrow}{=} \dfrac{p_i q_{ij}}{p_j}$

Εναλλακτικά,

$$\hat{q}_{ji} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[\hat{X}(t+h)=i \mid \hat{X}(t)=j]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(-t-h)=i \mid X(-t)=j]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(-t-h)=i]\Pr[X(-t)=j \mid X(-t-h)=i]}{\Pr[X(-t)=j]\,h}$$

$$= \frac{p_i}{p_j} q_{ij}$$

(4) Αντιστρέψιμη Μαρκ

Θεώρημα: Έστω $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη στάσιμη Μαρκ με πίνακα ρυθμών (q_{ij}) και κατανομή ισορροπίας (p_j). Τότε:

$\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow q_{ij} = \hat{q}_{ij} \quad \forall i,j$

$$\hat{q}_{ij} = \frac{p_j}{p_i} q_{ji}$$

$$\Leftrightarrow p_i q_{ij} = p_j q_{ji} \quad \forall i,j$$

(5) Είδη εξισώσεων ισορροπίας σε Μαρκ

$\underbrace{p_j q_j}_{\text{ρυθμός έξοδου από } j} = \underbrace{\sum p_i q_{ij}}_{\text{ρυθμός εισόδου στην } j} \quad \forall j$ (πλήρους) ισορροπίας

↑

ΙΣΧΥΟΥΝ ΠΑΝΤΑ

↓

γενικευμένη ισορροπία

$$\underbrace{\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c} p_j q_{ji}}_{\text{ρυθμός έξοδου από το A}} = \underbrace{\sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A} p_i q_{ij}}_{\text{ρυθμός εισόδου στο A}}$$

$\underbrace{p_i q_{ij}}_{\text{ρυθμός } i\to j} = \underbrace{p_j q_{ji}}_{\text{ρυθμός } j\to i} \quad \forall i,j$ λεπτομερούς ισορροπίας ΜΟΝΟ για αντιστρέψιμες

Κριτήριο αντιστρεψιμότητας Μαρκ
Kolmogorov

Θεώρημα: Έστω $\{X(t)\}$ Μαρκ αδιαχώριστη στάσιμη. Τότε:

$\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow \forall$ κύκλο καταστάσεων

$$i_0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_{n-1} \to i_n \to i_0$$

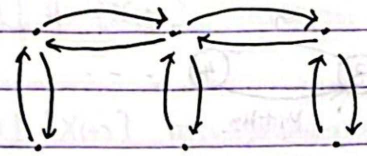
ισχύει:

$$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_n i_0} = q_{i_0 i_n} q_{i_n i_{n-1}} \cdots q_{i_1 i_0}$$

- Αρκεί να ελέγξω το κριτήριο για κύκλους με τουλάχιστον 3 καταστάσεις χωρίς επαναλήψεις καταστάσεων.

(16) Πόρισμα

- Κάθε Μαοχ με διάγραμμα ρυθμού μετάβασης αμφίδρομο δέντρο. ($\nexists$ απλοί κύκλοι με τουλ. 3 καταστάσεις) είναι αντιστρέψιμη.



(17) Διαδικασία υπολογισμού της κατανομής ισορροπίας για αντιστρέψιμες Μαοχ

Βήμα 1ο: Ελέγχω με Kolmogorov την αντιστρεψιμότητα.

Βήμα 2ο: Αν είναι αντιστρέψιμη επιλέγω κατάσταση i_0 αναφοράς.

Βήμα 3ο: Για κάθε κατάσταση i επιλέγω μονοπάτι $i_0 \rightleftarrows i_1 \rightleftarrows \dots \rightleftarrows i_n \rightleftarrows i$ και χρησιμοποιώ τις εξισώσεις λεπτομ. ισορροπίας

$$p_i = \frac{q_{i_n i}}{q_{i, i_n}} p_{i_n} = \dots$$

$$= \frac{q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_n i}}{q_{i_1 i_0} q_{i_2 i_1} \cdots q_{i i_n}} p_{i_0}$$

Βήμα 4ο: Με την εξίσωση κανονικοποίησης βρίσκω την p_{i_0}.

(8) Η M/M/2 με ετερογενείς υπηρέτες

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- 2 υπηρέτες
- Exp(μ_1) χρόνοι εξυπηρέτησης στον Υπηρέτη 1

  μ_2 —II— 2
- ∞ χωρητικότητα
- FCFS
- Όταν το σύστημα κενό, ένας εισερχόμενος πελάτης διαλέγει ισοπίθανα υπηρέτη μεταξύ των 1 και 2.

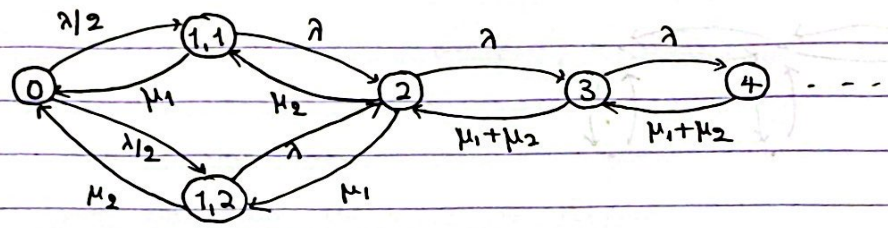
$Q(t) = \#$ πελατών στο σύστημα

$\{Q(t)\}$ όχι Μαρκ (προβλ. όταν $Q(t)=1$)

Άρα για Μαρκοβιανή αναπαράσταση χρειάζομαι

$I(t) =$ Τύπος υπηρέτη που εξυπηρετεί (μόνο για $Q(t)=1$)

$\{(Q(t), I(t))\}$



- Ελέγχω με Kolmogorov αν είναι αντιστρέψιμη.

$\{(Q(t), I(t))\}$ αντιστρέψιμη $\iff$

$$q_{0(1,1)}\, q_{(1,1)2}\, q_{2(1,2)}\, q_{(1,2)0} = q_{0(1,2)}\, q_{(1,2)2}\, q_{2(1,1)}\, q_{(1,1)0}$$

$$\iff \frac{\lambda}{2}\lambda\mu_1\mu_2 = \frac{\lambda}{2}\lambda\mu_2\mu_1 .$$

Αφού είναι αντιστρέψιμη: $p_{(1,1)} = \dfrac{\lambda}{2\mu_1} p_0$

$$p_{(1,2)} = \frac{\lambda}{2\mu_2} p_0$$

$\vdots$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^{n-2}} p_0 \qquad n \geq 2$$

Η εξίσωση κανονικοποίησης δίνει:

$$p_0\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^{n-2}}}\right) = 1$$

$$\hookrightarrow \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{n-2}$$

Ευσταθές $\iff \lambda < \mu_1+\mu_2$

Τότε, $$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}}\right)^{-1}.$$

Εφαρμογές αντιστρεψιμότητας στις Ουρές Αναμονής

(1) Βασικά σημεία.