Τότε, $p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}}\right)^{-1}$

12/12/24

Εφαρμογές αντιστρεψιμότητας στις Ουρές Αναμονής

(1) Βασικά σημεία

1| Η $\{X(t)\}$ στοχαστική διαδικασία $\rightsquigarrow$ $\{\hat{X}(t)\}$ αντιστρ. της $\{X(t)\}$.
$\hat{X}(t) = X(-t)$

2| $\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη $\iff$ $\{X(t)\}, \{\hat{X}(t)\}$ στοχαστικά ισοδύναμες

3| $\{X(t)\}$ Μαδχ αδιαχώριστη, στάσιμη $(q_{ij}), (p_j)$ $\Rightarrow$ $\{\hat{X}(t)\}$ Μαδχ αδιαχώριστη, στάσιμη $(\hat{q}_{ij}), (\hat{p}_j)$ $\quad \hat{p}_j = p_j \ \forall j$, $\quad \hat{q}_{ij} = \frac{p_j q_{ji}}{p_i} \ \forall i,j$

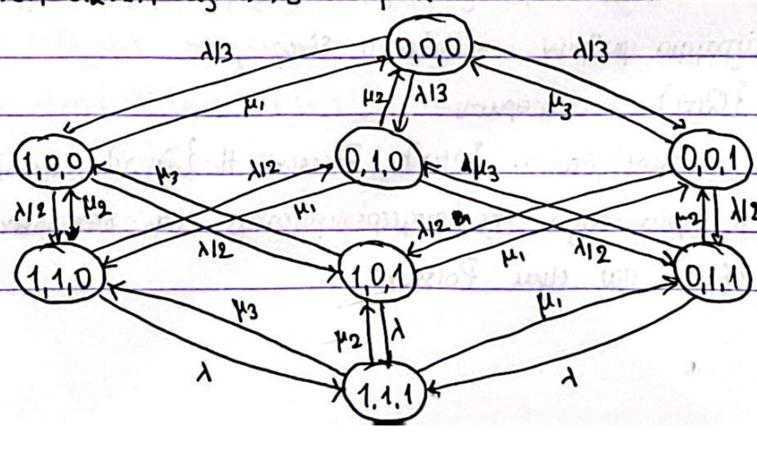
4| $\{X(t)\}$ Μαδχ αδιαχώριστη, στάσιμη, αντιστρέψιμη
$\iff p_i q_{ij} = p_j q_{ji} \quad \forall i,j$
$\iff$ $\forall$ κύκλο καταστάσεων το γινόμενο των ρυθμών είναι το ίδιο για τις δύο φορές διαγραφής του κύκλου.

(2) Η M/M/3/3 με ετερογενείς υπηρέτες και την επιλογή υπηρέτη

- Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ
- 3 υπηρέτες. Υπηρέτης $i \sim Exp(\mu_i)$ $\quad i=1,2,3$
- χωρητικότητα 3 ($\nexists$ χώρος αναμονής)
- ένας αφικνούμενος πελάτης επιλέγει τυχαία από τους ελεύθερους υπηρέτες.

Έστω $Q_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ υπηρέτης απασχολημένος} \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

$\{(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t))\}$ Μαδχ



Έστω ότι για έναν κύκλο καταστάσεων

$(i_{11}, i_{12}, i_{13}) \to (i_{21}, i_{22}, i_{23}) \to (i_{31}, i_{32}, i_{33}) \ldots \to (i_{n1}, i_{n2}, i_{n3}) \to (i_{11}, i_{12}, i_{13})$

$\rightsquigarrow$ παίρνουμε το γινόμενο των ρυθμών ώστε η θετική φορά δια το γινόμενο ρυθμών κατά την αρνητική φορά, τότε σε οποιαδήποτε φορά διαγραφής από μια κατάσταση με τους λιγότερους πελάτες σε μια κατάσταση με τους περισσότερους πελάτες εμφανίζεται με διαφορετική σειρά, ίδιοι όροι για τα λ (π.χ $\lambda/2$, $\lambda/3$) και για τα μ_i.

Άρα από Kolmogorov είναι αντιστρεψ. οπότε

$$p(1,0,0) = \frac{\lambda}{3\mu_1} p(0,0,0) \qquad p(1,1,0) = \frac{\lambda^2}{6\mu_1\mu_2} p(0,0,0)$$

$$p(0,1,0) = \frac{\lambda}{3\mu_2} p(0,0,0) \qquad p(1,0,1) = \frac{\lambda^2}{6\mu_1\mu_3} p(0,0,0)$$

$$p(0,0,1) = \frac{\lambda}{3\mu_3} p(0,0,0) \qquad p(0,1,1) = \frac{\lambda^2}{6\mu_2\mu_3} p(0,0,0)$$

$$p(1,1,1) = \frac{\lambda^3}{6\mu_1\mu_2\mu_3} p(0,0,0)$$

(3) Θεώρημα Burke

Έστω απλή Μαρκοβιανή ουρά με $\{Q(t)\}$ στοχαστική διαδικασία πλήθους πελατών, $\{A(t)\}$ διαδικασία αφίξεων, $\{D(t)\}$ διαδικασία αναχωρήσεων. Τότε:
- η $\{Q(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη
- αν η $\{A(t)\}$ είναι Poisson τότε και η $\{D(t)\}$ Poisson και $\forall\, t_0$: $\{D(t): t < t_0\}$ και $\{Q(t_0)\}$ είναι ανεξάρτητα.

Αποδ: - $\{Q(t)\}$ Μαρκ τύπου γέννησης-θανάτου

$\Rightarrow$ διάγραμμα ρυθμών αμφίδρομο δέντρο

$\overset{\text{Kolmogorov}}{\Rightarrow}$ $\{Q(t)\}$ αντιστρέψιμη

- Έστω επιπλέον ότι η $\{A(t)\}$ Poisson. Η $\{D(t)\}$ ταυτίζεται με την $\{\hat{A}(t)\}$ η οποία λόγω της αντιστρεψιμότητας είναι στοχαστικά ισοδύναμη με την $\{A(t)\}$ που είναι Poisson.

Scanned with CamScanner

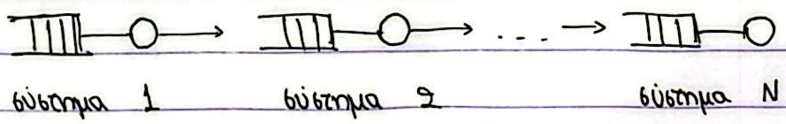
Επίσης, έστω $-t_0 \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι επειδή η $\{\hat{Q}(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή Ουρά με διαδικασία αφίξεων Poisson $\{\hat{A}(t)\}$ ισχύει:

$\hat{Q}(-t_0)$, $\{\hat{A}(t) : t > -t_0\}$ ανεξάρτητες

Άρα $Q(t_0)$, $\{D(-t) : -t < t_0\}$ ανεξαρτ.

(4) <u>Δίκτυα απλών Μαρκοβιανών ουρών σε σειρά με Poisson αφίξεις</u>

<u>Poisson λ</u>:



Απλά Μαρκοβιανά Συστήματα
το καθένα τροφοδοτούμενο από Poisson
έχει # πελατών Μαρκ γέννησης-θανάτου

Τότε $\forall t$: $Q_i(t)$ = # πελατών στο σύστημα i τη στιγμή t

Ισχύει: $\forall t_0$ $Q_1(t_0), \dots, Q_N(t_0)$ ανεξ.

αλλά $\{Q_1(t)\}, \{Q_2(t)\}, \dots, \{Q_N(t)\}$ όχι ανεξάρτητα

Έστω $p_i(n_i) = Pr[Q_i = n_i]$ η κατανομή ισορροπίας του συστήματος i αν τροφοδοτείται από Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ. Τότε:

$$p(\underbrace{n_1, n_2, \dots, n_N}_{\underline{n}}) = Pr[Q_1 = n_1, \dots, Q_N = n_N] = \prod_{i=1}^{N} p_i(n_i)$$

Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$: Θεώρημα Burke: $Q_1(t_0)$ ανεξ. $\{D_1(t) : t < t_0\}$

$$\{D_1(t) : t < t_0\} = \{A_2(t) : t < t_0\}$$

Όμως η $\{A_2(t) : t < t_0\}$ μαζί με τους χρόνους εξυπηρέτησης στο σύστημα 2 καθορίζουν πλήρως την $Q_2(t_0)$.

Άρα $Q_2(t_0)$ ανεξάρτητη της $Q_1(t_0)$ και ομοίως για τα επόμενα.

- Άρα $\forall t_0$: $Q_1(t_0), Q_2(t_0), \dots, Q_N(t_0)$ ανεξαρτ.

Επομένως $Pr[Q_1(t_0), Q_2(t_0), \dots, Q_N(t_0)] = Pr[Q_1(t_0) = n_1]\, Pr[Q_2(t_0) = n_2] \cdots$
$\cdots Pr[Q_N(t_0) = n_N] \xRightarrow{t_0 \to \infty} p(n_1, n_2, \dots, n_N) = p_1(n_1)\, p_2(n_2) \cdots p_N(n_N)$.

Scanned with CamScanner