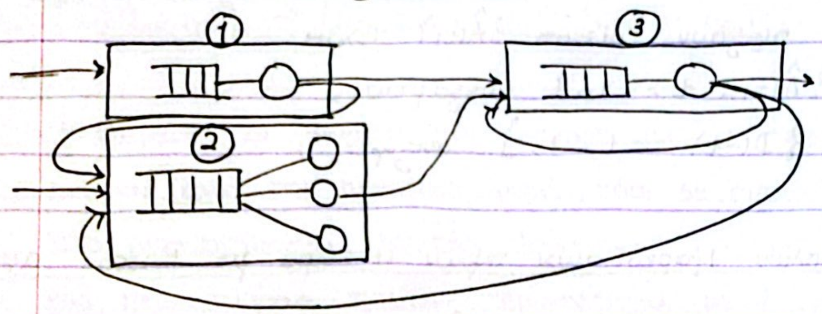
Δίκτυα συστημάτων εξυπηρέτησης

17/12/24



(1) Βασικά στοιχεία

N: # σταθμών

$Q_i(t)$ = # πελατών στο σταθμό i τη στιγμή t

$\underline{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_N(t))$ ← βασική στοχαστική διαδικασία

$p(\underline{n}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N) = \lim_{t\to\infty} Pr[\underline{Q}(t) = \underline{n}]$ ← κατανομή ισορροπίας του δικτύου

$\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$

$\underline{e_i} = (0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow \, i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0)$

$\underline{n} \to \underline{n} + \underline{e_i}$: εξωτερική άφιξη στο σταθμό i

$\underline{n} \to \underline{n} - \underline{e_j}$: αναχώρηση από το σταθμό j προς το εξωτερικό του δικτύου

$\underline{n} \to \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i}$: μετακίνηση πελάτη $j \to i$

$\underline{n} \to \underline{n} - k_j \underline{e_j} - k_m \underline{e_m} + \underline{e_n}$: επεξεργασία k_j προϊόντων από τον j και k_m από τον m και προσθήκη στον i

(2) Κλάσεις δικτύων

Δίκτυα → Μη Μαρκοβιανά ($\{\underline{Q}(t)\}$ όχι Μασχ)

↓

Μαρκοβιανά ($\{\underline{Q}(t)\}$ Μασχ) → Μη-απλά Μαρκοβιανά

↓

Απλά Μαρκοβ.
$\underline{Q}(t)$: $\underline{n} \to \underline{n} + \underline{e_i}$, $\underline{n} \to \underline{n} - \underline{e_j}$, $\underline{n} \to \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i}$ → όχι Jackson

↓

$\boxed{\text{Jackson}}$

(3) Ρυθμοί-πιθαν. σε Απλά Μαρκοβ. Δίκτυα

$\{\underline{Q}(t)\}$ Μασχ

$\lambda_i(\underline{n})$ = Ρυθμός εξωτερ. αφίξεων στον i $= q(\underline{n}, \underline{n} + \underline{e_i})$

$\mu_{ji}(\underline{n})$ = Ρυθμός μεταβ. $j \to i$ $= q(\underline{n}, \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i})$

$\mu_{j0}(\underline{n})$ = Ρυθμός εξωτ. αναχωρ. από τον j $= q(\underline{n} - \underline{e_j})$

$\mu_j(\underline{n}) = \sum_{i=0}^{N} \mu_{ji}(\underline{n})$: ρυθμός εξυπηρ. στον j

$p_{ji}(\underline{n}) = \dfrac{\mu_{ji}(\underline{n})}{\mu_j(\underline{n})}$: πιθανότητα δρομολόγησης προς τον i ενός πελάτη που έφυγε από τον j (για $i=0$: αναχώρηση από δίκτυο)

(4) Ανοικτό - κλειστό δίκτυο

Κλειστό $\Leftrightarrow$ Όχι εξωτερικές αφίξεις / αναχωρήσεις (σταθερό # πελατών)

Ανοικτό $\Leftrightarrow$ Όχι κλειστό

(5) Ρυθμοί - πιθανότητες σε Δίκτυα Jackson

Δίκτυο Jackson $\Leftrightarrow$ $\{\underline{Q}(t)\}$ Μαδx με επιτρεπ. μεταβ. $\underline{n} \to \underline{n}+\underline{e_i}$, $\underline{n}-\underline{e_j}$, $\underline{n}-\underline{e_j}+\underline{e_i}$

$\lambda_i(\underline{n}) = \lambda_i$

$\mu_j(\underline{n}) = \mu_j(n_j)$

$p_{ji}(\underline{n}) = p_{ji}$ (Μαρκοβιανές διαδρομές πελατών)

(6) Πίνακας Μαρκοβιανών Διαδρομών

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda} & \frac{\lambda_2}{\lambda} & & \cdots & \frac{\lambda_N}{\lambda} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1N} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$$

Πίνακας Μαδx Αδιαχώριστη

(7) Ρυθμός διαπέρασης σταθμού

$\{\underline{Q}(t)\}$ Ανοικτό δίκτυο Jackson

Λ_i = Ρυθμός διαπέρασης του i (throughput)

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\#\underset{\downarrow \\ \text{ή αναχωρήσεων}}{\text{αφίξεων}} \text{ στον } i \text{ στο } (0,t]]}{t}$$

Υπολογισμός Λ_i από λ_i, $\mu_j(n_j)$, p_{ji}

(8) Υπολογισμός Ρυθμών Διαπέρασης

Θεώρημα: Το $(\Lambda_i : i = 1, 2, \dots, N)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος των εξισώσεων κίνησης: $\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, N$

Επιπλέον ισχύει:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{i0}$$

Αποδ:

$$\Lambda_j = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\overbrace{D_j(t)}^{\#\text{ αναχωρήσεων από τον } j \text{ στο } (0,t]}]}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\overbrace{A_j(t)}^{\#\text{ αφίξεων στον } j \text{ στο } (0,t]}]}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\overbrace{\sum_{i=0}^{N} T_{ij}(t)}^{\#\text{ μεταβάσεων } i\to j \text{ στο } (0,t]}]}{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{E[T_{0j}(t)]}{t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{E[T_{ij}(t)]}{E[D_i(t)]} \cdot \frac{E[D_i(t)]}{t} \right)$$

$$= \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} p_{ij} \Lambda_i$$

Αθροίζοντας τις εξισώσεις κίνησης έχω:

$$\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i \underbrace{\sum_{j=1}^{N} p_{ij}}_{= 1 - p_{i0}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sum_{j=1}^{N} \Lambda_j} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + \cancel{\sum_{i=1}^{N} \Lambda_i} - \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{i0}$$

Έστω $\Lambda_0 = \lambda$. Τότε:

Εξισώσεις ισορροπίας του πίνακα Μαρκοβ. Διαδρομών

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \Lambda_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{i0} \quad \left(\text{εξισ. } \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{i0}\right) \\ \Lambda_j = \Lambda_0 \cdot \frac{\lambda_j}{\lambda} + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{ij} \end{cases}$$

❗ Επειδή ο P αντιστοιχεί σε αδιαχώριστη πεπερασμένη Μαλχ, έχει μοναδική στάσιμη κατανομή, έστω $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$ και κάθε άλλη λύση των εξισώσεων ισορροπίας είναι $c(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$. Άρα $\exists c'$:

$(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_N) = c'(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N) \Rightarrow c' = \frac{\lambda}{\pi_0}$

Άρα $(\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_N) = \left(\lambda, \lambda \frac{\pi_1}{\pi_0}, \lambda \frac{\pi_2}{\pi_0}, \dots, \lambda \frac{\pi_N}{\pi_0}\right)$

(9) Θεώρημα Jackson

Έστω $\{\underline{Q}(t)\}$ δίκτυο Jackson $(\lambda_i, \mu_i(n_j), p_{ij})$

Έστω $(\Lambda_j : j=1,2,\dots,N)$ η λύση των εξισώσεων ~~ισορροπίας~~ κίνησης

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{ij} \quad j=1,2,\dots,N$$

Ορίζουμε : $$B_j^{-1} = 1 + \sum_{n_j=1}^{\infty} \frac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\mu_j(2)\cdots\mu_j(n_j)} \quad j=1,2,\dots,N$$

Τότε :

(θετικά επαναλ.)

1| Αν $B_j^{-1} < \infty$ για κάθε $j=1,2,\dots,N$ τότε η $\{\underline{Q}(t)\}$ είναι ευσταθής

2| Αν $B_j^{-1} < \infty$ $\forall j$ τότε

$$p(\underline{n}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N) = p_1(n_1)\, p_2(n_2) \cdots p_N(n_N)$$

με

$$p_j(n_j) = \begin{cases} B_j, & n_j = 0 \\ B_j \dfrac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\mu_j(2)\cdots\mu_j(n_j)}, & n_j \geq 1 \end{cases}$$