19/12/24

Δίκτυα Jackson — Υπολογισμοί

(1) Θεώρημα Jackson

Έστω δίκτυο Jackson με N σταθμούς, παραμέτρους λ_i, $\mu_j(n_j)$, p_{ij}.

Έστω $(\Lambda_j : j=1,2,\dots,N)$ η λύση των εξισώσεων κίνησης

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{ij}, \quad j=1,\dots,N \quad (1)$$

Ισχύει, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = \lambda = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{i0} \quad (2)$

Έστω $B_j^{-1} = 1 + \sum_{n_j=1}^{\infty} \dfrac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\mu_j(2)\cdots\mu_j(n_j)} \qquad j=1,2,\dots,N$

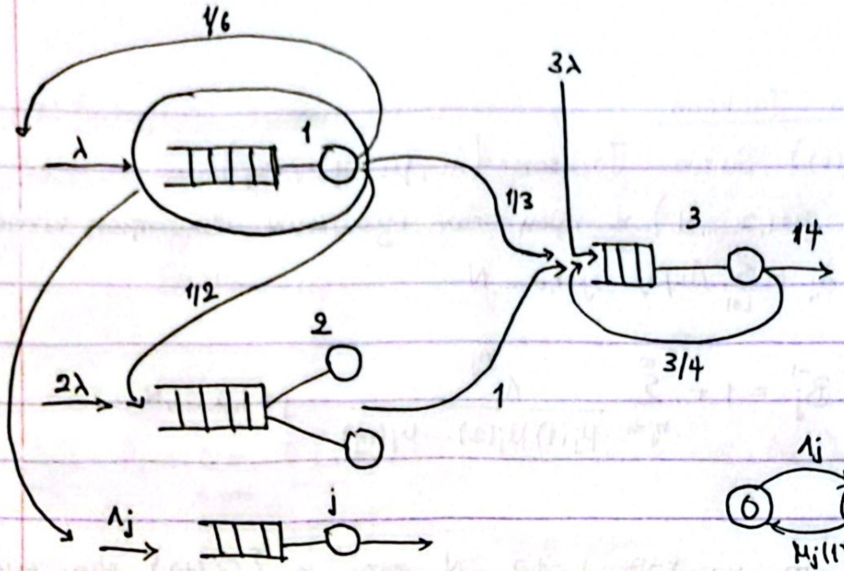
Εξισώσεις κίνησης:

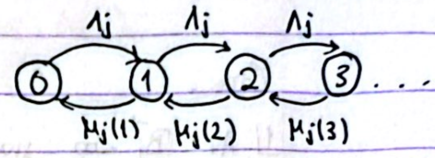
$$\begin{cases} \Lambda_1 = \lambda + \Lambda_1 \frac{1}{6} \\ \Lambda_2 = 2\lambda + \Lambda_1 \frac{1}{2} \\ \Lambda_3 = 3\lambda + \frac{1}{3}\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{3}{4}\Lambda_3 \end{cases}$$

$\Lambda_1 = \dfrac{6\lambda}{5}$

$\Lambda_2 = \dfrac{13\lambda}{5}$

$\Lambda_3 = 24\lambda$





1| Αν $B_j^{-1} < \infty \ \forall j$ τότε το δίκτυο είναι ευσταθές.

2| Αν είναι ευσταθές:

$$p(\underline{n}) = p(n_1, n_2, \dots, n_N) = \prod_{j=1}^{N} p_j(n_j) \qquad (*)$$

όπου $p_j(n_j) = \begin{cases} B_j, & n_j = 0 \\ B_j \dfrac{\Lambda_j^{n_j}}{\mu_j(1)\cdots\mu_j(n_j)}, & n_j \geq 1 \end{cases}$

Αποδ: Επαλήθευση των εξισώσεων ισορροπίας από την $p(\underline{n})$.

$$p(\underline{n}) = \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i + \sum_{j=1}^{N} \mu_j(n_j)\, 1_{\{n_j>0\}}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ll} \underline{n} \to \underline{n} + \underline{e_i} \quad \forall i & : \lambda_i \\ \underline{n} \to \underline{n} - \underline{e_j} + \underline{e_i} \quad \forall j \ \ \forall i = 1, \dots, N & : \mu_j(n_j)\, p_{ji} \\ \underline{n} \to \underline{n} - \underline{e_j} \quad \forall j & : \mu_j(n_j)\, p_{j0} \end{array}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n} + \underline{e_i})\, \mu_i(n_i+1)\, p_{i0} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n} + \underline{e_i} - \underline{e_j})\, \mu_i(n_i+1)\, p_{ij}\, 1_{\{n_j>0\}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} p(\underline{n} - \underline{e_j})\, \lambda_j\, 1_{\{n_j>0\}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{p(\underline{n}) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \sum_{i=0}^{N} p(\underline{n} + \underline{e_i})\, \mu_i(n_i+1)\, p_{i0}}_{\Sigma_0} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\left(p(\underline{n})\, \mu_j(n_j) - \sum_{i=1}^{N} p(\underline{n} + \underline{e_i} - \underline{e_j})\, \mu_i(n_i+1)\, p_{ij} - p(\underline{n} - \underline{e_j})\, \lambda_j \right)}_{\Sigma_j} 1_{\{n_j>0\}} = 0$$

Θδο $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_N = 0$ αν αντικαταστήσω στην $p(\underline{n})$ την (*)

Πραγματι, $\Sigma_0 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{p(\underline{n}+\underline{e}_i)}{p(\underline{n})} \mu_i(n_i+1) p_{i0}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)} \mu_i(n_i+1) p_{i0}$$

$$\frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)} \rightarrow \frac{\Lambda_i}{\mu_i(n_i+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i}{\cancel{\mu_i(n_i+1)}} \cancel{\mu_i(n_i+1)} p_{i0} = 0$$ Ισχύει από (2).

$$\Sigma_j = 0 \Leftrightarrow \frac{p(\underline{n})}{p(\underline{n}-\underline{e}_j)} \mu_j(n_j) - \sum_{i=1}^{N} \frac{p(\underline{n}+\underline{e}_i-\underline{e}_j)}{p(\underline{n}-\underline{e}_j)} \mu_i(n_i+1) p_{ij} - \lambda_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_j(n_j)}{p_j(n_j-1)} \mu_j(n_j) - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)} \mu_i(n_i+1) p_{ij} - \lambda_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Lambda_j}{\cancel{\mu_j(n_j)}} \cancel{\mu_j(n_j)} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i}{\cancel{\mu_i(n_i+1)}} \cancel{\mu_i(n_i+1)} p_{ij} - \lambda_j = 0$$

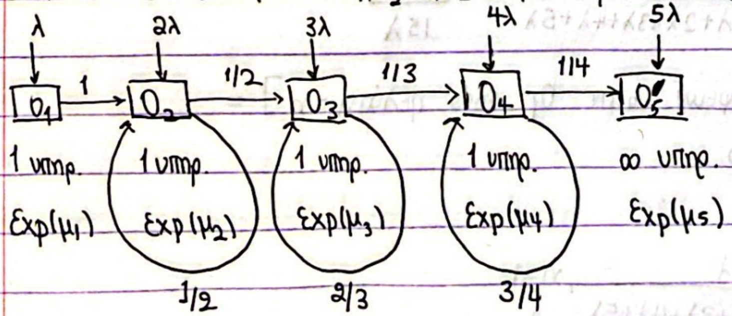
$$\Leftrightarrow \Lambda_j = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i p_{ij} + \lambda_j$$ Ισχύει από την (1).

(2) Ασκήσεις

8.1 - 8.4 + Παλιά θέματα

(3) Άσκηση 8.2

Δίκτυο 5 σταθμών: $O_1, O_2, \dots, O_5$ με άπειρη χωρητικότητα



1| Συνθήκη ευστάθειας

2| Κατανομή ισορροπίας $p(\underline{n})$

3| Μέσος # πελατών στο δίκτυο

4| Μέσος χρόνος παραμονής πελατών στο δίκτυο

5| Κατανομή # επισκεψ. πελ. στο O_i.

Υπενθύμιση: Χρησιμοποιούνται χωρίς απόδειξη στα δίκτυα

M/M/1 $\quad p_n = (1-\rho)\rho^n \quad n \geq 0 \quad E[Q] = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

M/M/∞ $\quad p_n = e^{-\rho}\dfrac{\rho^n}{n!} \quad n \geq 0 \quad E[Q] = \rho$

1| Εξισώσεις κίνησης

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \lambda \\
\Lambda_2 &= 2\lambda + \Lambda_1 + \frac{\Lambda_2}{2} \\
\Lambda_3 &= 3\lambda + \frac{\Lambda_2}{2} + \frac{2}{3}\Lambda_3 \\
\Lambda_4 &= 4\lambda + \frac{\Lambda_3}{3} + \frac{3}{4}\Lambda_4 \\
\Lambda_5 &= 5\lambda + \frac{1}{4}\Lambda_4
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \lambda \\
\Lambda_2 &= 6\lambda \\
\Lambda_3 &= 18\lambda \\
\Lambda_4 &= 40\lambda \\
\Lambda_5 &= 15\lambda
\end{aligned}$$

Ευστάθεια αν: $\underbrace{\dfrac{\lambda}{\mu_1}}_{\rho_1} < 1$ και $\underbrace{\dfrac{6\lambda}{\mu_2}}_{\rho_2} < 1$ και $\underbrace{\dfrac{18\lambda}{\mu_3}}_{\rho_3} < 1$ και $\underbrace{\dfrac{40\lambda}{\mu_4}}_{\rho_4} < 1$, $\rho_5 = \dfrac{15\lambda}{\mu_5}$

2| $p(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = \left(\prod_{i=1}^{4} (1-\rho_i)\rho_i^{n}\right) e^{-\rho_5} \dfrac{\rho_5^{n_5}}{n_5!}$

3| $E[Q] = \left(\sum_{i=1}^{4} \dfrac{\rho_i}{1-\rho_i}\right) + \rho_5$

4| $E[S] = \dfrac{E[Q]}{\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda} = \dfrac{E[Q]}{15\lambda}$

5| Pr[# επισκέψεων στην O_1 ενός πελάτη $= n$] =

$$= \begin{cases} \dfrac{14}{15}, & n=0 \\[2ex] \dfrac{1}{15} = \dfrac{\lambda}{\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda}, & n=1 \\[2ex] 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pr[\#\ \text{επισκ. στην } O_2 \text{ ενός πελάτη} = n] = \begin{cases} \dfrac{3\lambda+4\lambda+5\lambda}{\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda} = \dfrac{12}{15}, & n=0 \\ \dfrac{3}{15}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}, & n\geq 1 \end{cases}$$

$$\Pr[\#\ \text{επισκ. στην } O_3\ ] = \begin{cases} \dfrac{9}{15}, & n=0 \\ \dfrac{6}{15}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\dfrac{1}{3}, & n\geq 1 \end{cases}$$