$$Pr[\#\text{ επισκ. στην } O_2 \text{ ενός πελάτη} = n] = \begin{cases} \dfrac{3\lambda+4\lambda+5\lambda}{\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda+5\lambda} = \dfrac{12}{15}, & n=0 \\ \dfrac{3}{15}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & n\geq 1 \end{cases}$$

$$Pr[\#\text{ επισκ στην } O_3] = \begin{cases} \dfrac{\cancel{*}9}{15}, & n=0 \\ \dfrac{6}{15}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\dfrac{1}{3}, & n\geq 1 \end{cases}$$

07/01/25

Επανάληψη

Ασκήσεις, Παλιά Θέματα

(1) Δομή Εξέτασης

- Απλές Μαρκοβιανές Ουρές (ευστάθεια, p_n, a_n, d_n, $\cancel{p}^*$ λ^*, μ^*, ποσοστό χαμ. πελ., $E[Q]$, $E[S]$, καταν. S, $E[I]$, $E[Z]$, $E[Y]$)
- Πιθανογεννήτριες ⇝ Μαρκοβιανές Ουρές, Διδιάστατες Μαρκοβιανές Ουρές ($P(z)$ συναρτ. δίχων αγνώστων, προσδιορισμός αγνώστων, Αντιστροφής $P(z)$ ↓ Ακριβής Τύπος ↓ Αναδρομικός)
- Δίκτυα (λ_i, $p(\underline{n})$, Μέσος # πελ. κ.λ.π)
- Μοντελοποίηση (Λεκτική περιγραφή → Μαρκ., Μέθοδος Φάσεων)
- Ανάλυση Μέσης Τιμής
- Άλλα εργαλεία επίλυσης Μαρκ ⇝ Αντιστρεψιμότητα, Εξισ. γενικ. ισορ.

(2) <u>Θέμα 1 / Ιανουάριος 2023</u>

- Τροποποίηση M/M/2
- λ: ρυθμός αφίξεων
- μ: ρυθμός εξυπηρέτησης
- Αποθαρρυνόμενοι πελάτες

πιθανότητα εισόδου

$$1-q_n = \begin{cases} 1, & n=0,1 \\ \frac{2}{n+1}, & n=2,3,4,\dots \end{cases}$$

πιθανότητα άμεσης αποχωρ. αφικνυόμενου πελάτη που βρίσκει n

$$= q_n = \begin{cases} 0, & n=0,1 \\ \frac{n-1}{n+1}, & n=2,3,4,\dots \end{cases}$$

- $\lambda, \mu > 0$, $\rho = \lambda/\mu$

α) Αιτιολόγηση $\{Q(t)\}$ Μαδx + Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης
Συνθήκη ευστάθειας (p_n) όταν ευσταθές

β) Μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που εξυπηρ.
(a_n), (a_n^{enter})

γ) $E[S_n]$, $E[S^{enter}]$
↑ Χρόνος παραμονής αφικνύμενου που βρίσκει n

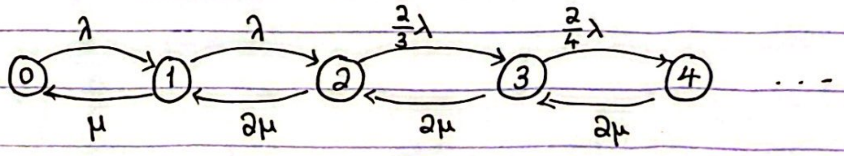
δ) $E[Z]$

<u>Λύση:</u>

α)

<u>κατάσταση</u>	<u>Επόμενη κατάσταση</u>	<u>Χρόνος</u>
0	1	$Exp(\lambda)$
1	2	$Exp(\lambda)$
	0	$Exp(\mu)$
$n \geq 2$	$n+1$	$Exp(\lambda \cdot \frac{2}{n+1})$
	$n-1$	$Exp(2\mu)$

όλα Exp
⇓
$\{Q(t)\}$ Μαδx.



$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$$

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{\frac{\cancel{2^{n-1}}}{n!}\cdot\lambda^n}{\cancel{2^{n-1}}\mu^n} = \frac{\rho^n}{n!} \quad , n\geq 1$$

$$B^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty \quad \text{πάντα ευσταθές}$$

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\,\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, & n\geq 1 \end{cases} = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}, \; n\geq 0$$

$$Q \sim Poisson(\rho)$$

β) Μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που εξυπηρ. $= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\overset{\shortparallel}{p_n} \leftarrow \text{PASTA}} (1-q_n)$

$$= p_0+p_1+\sum_{n=2}^{\infty}p_n\frac{2}{n+1} = e^{-\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{2}{n+1} = e^{-\rho}\left(1+\frac{2}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\right) =$$

$$= e^{-\rho}\left(1+\frac{2}{\rho}\left(e^{\rho}-1-\rho\right)\right)$$

Εναλλακτικά, μακροπρ. ποσοστό πελ. που εξυπ. $= \dfrac{\mu^*}{\lambda} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty}p_n\mu_n}{\lambda} = \dfrac{p_1\mu_1+\sum_{n=2}^{\infty}p_n 2\mu}{\lambda} =$

$$= \frac{p_1+2(1-p_0-p_1)}{\rho} = \frac{e^{-\rho}\cdot\rho+2(1-e^{-\rho}-\rho e^{-\rho})}{\rho}$$

$$a_n^{enter} = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*} = \frac{e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}\cdot\rho\,\frac{2}{n+1}}{e^{-\rho}\rho+2(1-e^{-\rho}+\rho e^{-\rho})} \quad n\geq 1$$

$$a_0^{enter} = \frac{\lambda p_0}{\lambda^*} = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\lambda^*}$$

$E[S_n] = 1/\mu \quad , n=0,1$

γ) $E[S_n] = (1-q_n)\cdot\left(\dfrac{1}{\mu}+\dfrac{n-1}{2\mu}\right) \quad n\geq 2$

$$= \frac{2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$$E[S^{enter}] = \frac{E[Q]}{\lambda^*}$$

δ) $E[I] = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow e^{-\rho} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Z]} \Rightarrow$

$$E[Z] = \frac{e^{\rho}}{\lambda}$$

(13) Θέμα 2 / Ιανουάριος 2023

- M/M/1 με ομαδικές αφίξεις κ' μεμονωμένες εξυπηρετήσεις
- Ρυθμός αφίξεων ομάδων : λ
- $Pr[\text{μεγ. ομάδας} = n] = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n \geq 1$

- Ρυθμός εξυπηρ. : μ
- Αν μια ομάδα βρίσκει τουλ. 1 πελάτη μπαίνει μόνο 1.
  Διαφορετικά μπαίνουν όλοι.

α) $\{Q(t)\}$ Μαρκ + Διαγρ. + Εξισ. Ισορρ.

β) $P(Z)$

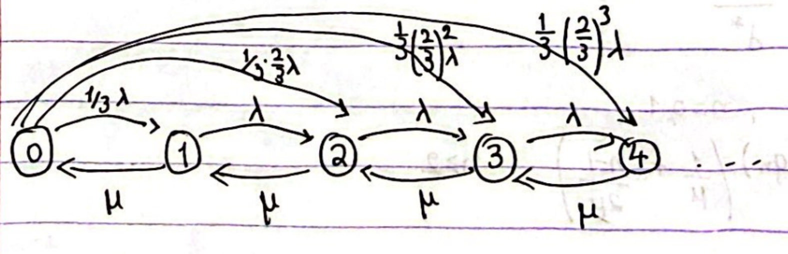
γ) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών

Λύση:

α)

κατάσταση	επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	k, $k \geq 1$	$Exp\left(\lambda \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

όλα Exp $\Downarrow$ $\{Q(t)\}$ Μαρκ.



$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (0)$

$(\lambda+\mu) p_1 = \frac{1}{3}\lambda p_0 + \mu p_2 \quad (1)$

$(\lambda+\mu) p_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \lambda p_0 + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \quad (n)$

β) $(0) \times z^0 + (1) \times z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n) \times z^n \Rightarrow$

$$(\lambda+\mu) P(z) - \mu p_0 = \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1} z^n + \lambda p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P(z) - \mu p_0 = \frac{\mu}{z}\left(P(z) - p_0\right) + \lambda z \left(P(z) - p_0\right) + \frac{\lambda p_0 z}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2z}{3}}$$

$$\overset{\times z}{\Leftrightarrow} \left[(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z^2\right] P(z) = -\mu p_0 + \mu z p_0 - \lambda z^2 p_0 + \frac{\lambda p_0 z^2}{3-2z}$$

$$\Leftrightarrow (1-z)(\lambda z - \mu) P(z) = \left[\frac{\lambda z^2}{3-2z} - \lambda z^2 + \mu z - \mu\right] p_0$$