09/01/25

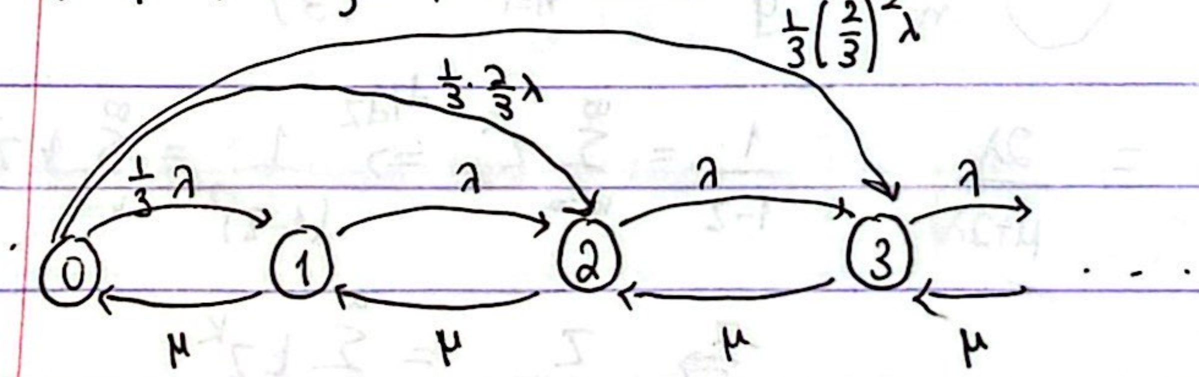
(1) Θέμα 2 | Ιανουάριος 2023 (συνέχεια)

Αν η ομάδα βρει μη κενό σύστημα τότε μπαίνει μόνο ένα μέλος της.

λ: ρυθμός αφιξ. ομάδων

$g_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$: πιθαν. μεγέθους ομάδας n

μ: ρυθμός εξυπηρέτησης



(β) (Από εκεί που το αφήσαμε στο προηγούμενο μάθημα)

Διαιρώ με $z-1$ $\Rightarrow (\mu-\lambda z)P(z) = \mu p_0 + \frac{2\lambda z^2 p_0}{3-2z} = \frac{(2\lambda z^2-2\mu z+3\mu)p_0}{3-2z}$

$$\Leftrightarrow P(z) = \frac{(2\lambda z^2-2\mu z+3\mu)p_0}{(\mu-\lambda z)(3-2z)}$$

Για $z=1 \rightsquigarrow 1 = \frac{2\lambda+\mu}{\mu-\lambda}p_0$

$$\rightsquigarrow P(z) = \frac{\mu-\lambda}{\mu+2\lambda}\cdot\frac{2\lambda z^2-2\mu z+3\mu}{(\mu-\lambda z)(3-2z)}$$

Σχόλιο: Αν οι ομάδες είχαν μέγεθος με σ.π. $(g_n : n\geq 1)$ και μέση τιμή m, η πιθαν. ένας πελάτης να ανήκει σε ομάδα μεγέθους n είναι $\frac{ng_n}{m}$.

πιθαν. πελ. να ανήκει σε ομ. μεγ. n $= \lim_{N\to\infty}\frac{(Y_1+Y_2+\dots+Y_N)/N}{(X_1+X_2+\dots+X_N)/N} \overset{ΝΜΑ}{=} \frac{E[Y]}{E[X]} = \frac{ng_n}{m}$

X_i = μέγεθος ομάδας $\quad Y_i = n\mathbb{1}_{\{X_i=n\}}$

1ος τρόπος

γ) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών $=$ $\frac{\text{Ρυθμός αφίξεων πελατών που χάνονται}}{\text{Ρυθμός αφίξεων πελατών}}$

Ρυθμός αφίξεων πελατών $= \lambda\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}_{\text{μέσο μέγεθος ομάδας}} = 3\lambda$

Ρυθμός αφίξεων πελατών που χάνονται $= 3\lambda - 3\lambda p_0 - \lambda(1-p_0) = 2\lambda(1-p_0) = 2\lambda\cdot\frac{3\lambda}{\mu+2\lambda}$

2ος τρόπος

Μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών $= Pr$[αφικνούμενος πελάτης να χαθεί]

$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} Pr\left[\text{ο πελάτης ανήκει σε ομάδα μεγέθους } n\right] Pr\left[\text{η ομάδα βρίσκει } k \text{ πελάτες}\right] Pr\left[\text{ο πελάτης χάνεται} \mid \right]$

ο πελάτης ανήκει σε ομάδα μεγέθους n και η ομάδα βρίσκει k.

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{3}p_k\frac{n-1}{n} = \frac{1}{9}(1-p_0)\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{3\lambda}{\mu+2\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k}_{6} = \frac{2\lambda}{\mu+2\lambda}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty}z^k \overset{d/dz}{\Rightarrow} \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}$$

$$\overset{\cdot z}{\Rightarrow} \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}kz^k$$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = 6$

(2) Θέμα 3 | Ιανουάριος 2023

Δίκτυο Jackson κυκλικό

Σταθμός i :

1 υπηρέτης

∞ χωρητικότητα

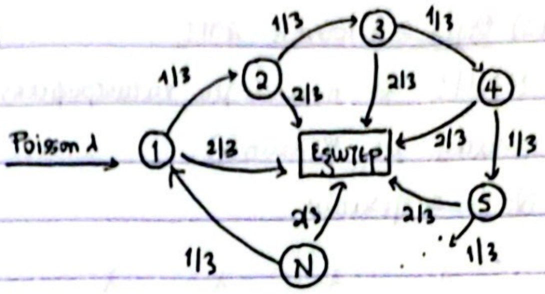
$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρέτησης

α) Ρυθμός διαπέρασης σταθμού i

β) Μέσος # πελατών σταθμού i

γ) Μέσος χρόνος παραμονής

δ) Μέσος # επισκ. πελάτη στον σταθμό i.



Λύση: α) $\Lambda_1 = \lambda + \frac{1}{3}\Lambda_N$

$$\Lambda_i = \frac{1}{3}\Lambda_{i-1} \quad i=2,3,\dots,N$$

Άρα, $\Lambda_1 = \lambda + \left(\frac{1}{3}\right)^N \Lambda_1 \Rightarrow \Lambda_1 = \dfrac{\lambda}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N}$ και $\Lambda_i = \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\lambda}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N}$

β) $E[Q_i] = \dfrac{\frac{\Lambda_i}{\mu}}{1-\frac{\Lambda_i}{\mu}}$

γ) $E[S_i] = \dfrac{1}{\Lambda_i} E[Q_i] = \dfrac{1}{\mu-\Lambda_i}$

δ) Μέσος # επισκ. στον i = πιθαν. επισκ. στον i $\times$ Μέσος # επισκ. στον i δεδομένου ότι ξεκινά από i =

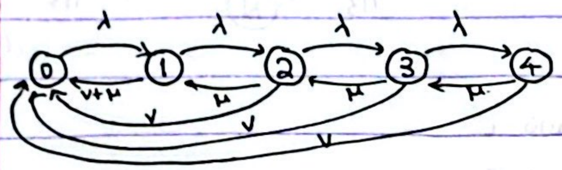
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N}$$

ή $\Pr[\#\text{ επισκ στην } i \text{ είναι } n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{3^N}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{3^N}\right)$

(3) Θέμα 2 / Ιούνιος 2017

M/M/1 με λ, μ με καταστροφικές βλάβες που διώχνουν όλους τους πελάτες με Poisson(ν).

$Q(t)$ = # πελατών



$$\lambda p_0 = (\nu+\mu)p_1 + \nu \sum_{n=2}^{\infty} p_n$$

$$(\lambda+\mu+\nu)p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \quad n \geq 1$$

Μέθοδος Πιθανογεννητριών

$$(\lambda+\mu+\nu)P(z) - (\mu+\cancel{\nu})p_0 = \nu(1-\cancel{p_0}) + \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z}(P(z)-p_0)$$

$\cdot z$
$$\Rightarrow P(z) = \frac{(\mu p_0+\nu)z - \mu p_0}{(\lambda+\nu+\mu)z - \lambda z^2 - \mu}$$

$$D(z) = (\lambda+\nu+\mu)z - \lambda z^2 - \mu$$

$D(0) = -\mu < 0$ $\qquad \lim_{z\to-\infty} D(z) = -\infty$

$D(1) = \nu > 0$ $\qquad \lim_{z\to+\infty} D(z) = -\infty$

Άρα η μικρότερη ρίζα του $D(z)$ είναι στο $(0,1)$.

α, β οι ρίζες του $D(z)$ $\quad \beta \in (0,1) \quad a \in (1,\infty)$

$$P(z) = \frac{\text{σταθερά}\,\cancel{(z-\beta)}}{(z-a)\cancel{(z-\beta)}}$$

$$P(1) = \frac{\text{σταθερά}}{1-a} \Rightarrow \text{σταθερά} = 1-a$$

Άρα $P(z) = \dfrac{1-a}{z-a} = \dfrac{a-1}{a-z} = \dfrac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{z}{a}}$ άρα $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \left(1-\frac{1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a}z\right)^n$

$$\Rightarrow p_n = \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n \quad n=0,1,\ldots$$