Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης
στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα
Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις

Ασκήσεις στην Ανανεωτική Θεωρία

1. Έστω απλή απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F(t)$ με πεπερασμένες μέση τιμή τ και διασπορά σ^2.
   (α) Έστω $m_k(t) = E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)...(N(t)-k+1)]$, $k \geq 1$, η k-οστή παραγοντική ροπή της $N(t)$, ενώ για $k=0$ ορίζουμε $m_0(t)=1$. Να αποδείξετε ότι
   $$m_k(t) = k\int_0^t m_{k-1}(t-x)dF(x) + \int_0^t m_k(t-x)dF(x), \quad k \geq 1.$$
   Ακολούθως να εκφράσετε το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $m_k^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}dm_k(t)$ της $m_k(t)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού $F^*(s)$ της $F(t)$.
   (β) Έστω $X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ ο t-εξαρτωμένος ενδιάμεσος χρόνος τη στιγμή t. Διατυπώστε μια ανανεωτική εξίσωση για τη $E[X(t)]$. Βρείτε το $\lim_{t\to\infty} E[X(t)]$.
   (γ) Θεωρούμε μια νέα διαδικασία $\{M(t)\}$ που δημιουργείται ως εξής: Κάθε γεγονός της αρχικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ καταγράφεται με πιθανότητα p ή αγνοείται με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο και $M(t)$ είναι ο αριθμός των καταγεγραμμένων γεγονότων μέχρι τη στιγμή t. Είναι η $\{M(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία; Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $E[M(t)]$ συναρτήσει του μετασχηματισμού $F^*(s)$ της $F(t)$ και του p.

2. Έστω $\{N_1(t)\}$ απλή ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_1(x)$ και $\{N_2(t)\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ (δηλαδή η $\{N_2(t)\}$ είναι απλή ανανεωτική διαδικασία με εκθετική κατανομή ενδιάμεσων χρόνων με ρυθμό λ), ανεξάρτητη της $\{N_1(t)\}$. Έστω $Z(t) = t - S_{N_1(t)}$ ο αναδρομικός χρόνος (παρελθών χρόνος ή ηλικία) ανανέωσης τη στιγμή t και $Y(t) = S_{N_1(t)+1} - t$ ο προδρομικός χρόνος (υπολειπόμενος χρόνος) ανανέωσης τη στιγμή t, για την $\{N_1(t)\}$.
   (α) Να υπολογίσετε τα όρια
   $$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Z(s)ds}{t} \quad \text{και} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t Y(s)ds}{t},$$
   συναρτήσει της μέσης τιμής τ και της διασποράς σ^2 της $F_1(x)$.

(β) Στην περίπτωση που η κατανομή $F_1(x)$ είναι η κατανομή Γάμμα (Erlang) με παραμέτρους k, μ, δηλ. συνάρτηση πυκνότητας

$$f_1(x) = \frac{\mu^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\mu x}, \quad x > 0,$$

να βρεθεί η κατανομή του αριθμού των γεγονότων που συμβαίνουν στη $\{N_2(t)\}$ μέχρι να συμβεί το πρώτο γεγονός της $\{N_1(t)\}$. Επίσης, να βρεθεί η $P(N_1(t) = n)$.

3. Έστω η απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των γεγονότων την ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1). Να αποδειχτεί ότι η αντίστοιχη ανανεωτική συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$ δίνεται από τον τύπο $m(t) = e^t - 1$, για $0 < t < 1$.

4. Έστω απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των γεγονότων $F(x)$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t) = E[(N(t))^2]$, $t \geq 0$.
   (α) Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $g(t)$.
   (β) Να αποδειχθεί ότι $g(t) = m(t) + 2\int_0^t m(t-s)dm(s)$.