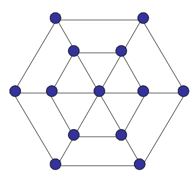
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης
στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα
Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις

Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

1. Έστω $\{X_n\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πιθανότητες μετάβασης $p_{r,r-1}=1$ για $r\geq 1$ και $p_{0r}=f_r$ για $r\geq 0$, όπου $(f_r : r=0,1,\ldots)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας (δηλαδή $f_r\geq 0$ για $r\geq 0$ και $\sum_{r=0}^{\infty} f_r = 1$) με $f_0=0$. Να βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την $(f_r : r=0,1,\ldots)$ ώστε η $\{X_n\}$ να είναι θετικά επαναληπτική και στην περίπτωση αυτή να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της.

2. Μια αράχνη κινείται τυχαία μεταξύ των κορυφών του ιστού της που είναι πλεγμένος με r ακτίνες και s κύκλους. Π.χ. σχηματικά η περίπτωση $r=6, s=2$ είναι ως εξής:



Αν η αράχνη είναι στο κέντρο, τότε είναι εξίσου πιθανό να κινηθεί κατά μήκος οποιαδήποτε ακτίνας σε γειτονική κορυφή. Αν είναι σε κάποια από τις εσωτερικές κορυφές, τότε είναι εξίσου πιθανό να μετακινηθεί σε κάποια από τις τέσσερις γειτονικές κορυφές και αν είναι στην περίμετρο, τότε είναι εξίσου πιθανό να μετακινηθεί σε κάποια από τις τρεις γειτονικές κορυφές. Βρείτε:
(α) Το μέσο αριθμό κινήσεων για να φτάσει η αράχνη στην περίμετρο ξεκινώντας από το κέντρο του ιστού.
(β) Το μέσο αριθμό κινήσεων για να φτάσει η αράχνη στο κέντρο του ιστού ξεκινώντας από κάποιο σημείο της περιμέτρου.

3. Δυο γειτονικά δοχεία C_1 και C_2 περιέχουν το καθένα m σφαιρίδια. Από τα συνολικά $2m$ σφαιρίδια, m είναι λευκά και m είναι μαύρα. Στις διαδοχικές χρονικές στιγμές $t=1,2,\ldots$ ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από κάθε δοχείο. Κατόπιν τα σφαιρίδια ανταλλάσσονται μεταξύ των δοχείων. Έστω X_n ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων στο δοχείο C_1 μετά από τη στιγμή t (δηλαδή μετά την t-οστή ανταλλαγή). Δείξτε ότι η $\{X_n\}$

είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα, βρείτε τις πιθανότητες μετάβασής της και τη στάσιμη κατανομή της.

4. Μια μαϊμού πληκτρολογεί γράμματα σε μια γραφομηχανή που έχει μόνο τα 24 γράμματα του Ελληνικού αλφάβητου, πατώντας πλήκτρα εντελώς τυχαία (δηλαδή σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο {Α, Β, ..., Ω}). Να βρείτε τον αριθμό γραμμάτων που απαιτούνται κατά μέσο όρο μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η λέξη (ακολουθία γραμμάτων)
(α) ΑΠΛΕΣ
(β) ΑΠΑΛΑ
(γ) ΑΝΑΝΑ

5. Δίνεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου $\{X_n\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης
$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
όπου $b_j, a_j > 0$ για $j = 0,1,\ldots$ και $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τις συναρτήσεις πιθανότητας $(b_j : j = 0,1,\ldots)$ και $(a_j : j = 0,1,\ldots)$ ώστε η $\{X_n\}$ να είναι θετικά επαναληπτική. Στην περίπτωση αυτή να βρεθεί η πιθανογεννήτρια της στάσιμης κατανομής της.

6. Ένα ράφι έχει μια βιβλιοθήκη με b βιβλία, αριθμημένα από το 1 ως το b. Σε κάθε περίπτωση που παίρνουμε ένα βιβλίο από το ράφι, η πιθανότητα να επιλέξουμε το βιβλίο n είναι $s(n) > 0$, $1 \le n \le b$, ανεξάρτητα από τις προηγούμενες επιλογές μας ($\sum_{n=1}^{b} s(n) = 1$). Πριν πάρουμε ένα νέο βιβλίο από το ράφι, επιστρέφουμε το προηγούμενο το οποίο τοποθετείται πάντα στην πρώτη θέση αριστερά από όλα τα άλλα βιβλία του ραφιού. Έστω $X_r = (j_1, j_2, \ldots, j_b)$ η διάταξη των βιβλίων μετά την r-οστή επιλογή και επιστροφή βιβλίου. Δείξτε ότι η (X_r) είναι αδιαχώριστη απεριοδική Μαρκοβιανή αλυσίδα με στάσιμη κατανομή
$$\pi(j_1, j_2, \ldots, j_b) = s(j_1)\frac{s(j_2)}{1-s(j_1)}\frac{s(j_3)}{1-s(j_1)-s(j_2)}\cdots\frac{s(j_b)}{1-s(j_1)-\cdots s(j_{b-1})}.$$