Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης
στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα
Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις

Ασκήσεις μοντελοποίησης στην Μαρκοβιανή ανανεωτική θεωρία

1. Έστω $\{Z(t), t \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου τύπου γέννησης-θανάτου με ρυθμό γέννησης λ_i και ρυθμό θανάτου μ_i στην κατάσταση i, $i = 0,1,2,\cdots (\mu_0 = 0)$. Έστω S_n η n-οστή στιγμή θανάτου (δηλαδή η στιγμή της n-οστής μετάβασης προς τα αριστερά) και $Y_n = Z(S_n^+)$ η κατάσταση της $\{Z(t)\}$ αμέσως μετά τη στιγμή αυτή. Να αποδειχθεί ότι η $\{(Y_n, S_n), n \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία και να βρεθεί ο πυρήνας της $G(x)$.

2. Θεωρούμε το $M/G/1/K$ σύστημα εξυπηρέτησης, στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και έχουν ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν τη συνεχή κατανομή $B(t)$ και το οποίο έχει 1 υπηρέτη και συνολική χωρητικότητα (χώρου εξυπηρέτησης και χώρου αναμονής) για K πελάτες. Ορίζουμε $Z(t)$ το πλήθος των πελατών τη στιγμή t, S_n τη χρονική στιγμή της n-οστής αναχώρησης και $Y_n = Z(S_n^+)$ το πλήθος των πελατών αμέσως μετά την n-οστή αναχώρηση. Να αποδειχθεί ότι η $\{(Y_n S_n), n \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία και να βρεθεί ο πυρήνας της $G(x)$.

3. Θεωρούμε το $G/M/1/K$ σύστημα εξυπηρέτησης, στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $A(t)$ και έχουν ανεξάρτητους και ισόνομους χρόνους εξυπηρέτησης που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ και το οποίο έχει 1 υπηρέτη και συνολική χωρητικότητα (χώρου εξυπηρέτησης και χώρου αναμονής) για K πελάτες. Ορίζουμε $Z(t)$ το πλήθος των πελατών τη στιγμή t, S_n τη χρονική στιγμή της n-οστής άφιξης και $Y_n = Z(S_n^-)$ το πλήθος των πελατών αμέσως πριν την n-οστή άφιξη. Να αποδειχθεί ότι η $\{(Y_n S_n), n \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία και να βρεθεί ο πυρήνας της $G(x)$.

4. Θεωρούμε ένα συνεργείο με N μηχανές και 1 επισκευαστή. Όταν μια μηχανή είναι σε λειτουργία τότε παθαίνει βλάβη με σταθερό ρυθμό μ

(δηλαδή οι χρόνοι λειτουργίας των μηχανών ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ρυθμό μ). Οι χρόνοι επισκευής ακολουθούν την συνεχή κατανομή $R(t)$. Όλες οι εν λειτουργία μηχανές έχουν ανεξάρτητους χρόνους ζωής και οι υπό επισκευή μηχανές επισκευάζονται σύμφωνα με την πειθαρχία FCFS. Έστω $Z(t)$ ο αριθμός των υπό επισκευή μηχανών τη στιγμή t, S_n η στιγμή που ολοκληρώνεται η n-οστή επισκευή και $Y_n = Z(S_n^+)$. Να αποδειχθεί ότι η $\{(Y_n, S_n)\}$ είναι μια Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία και να βρεθεί ο πυρήνας της $G(x)$.

5. Θεωρούμε ένα κλειστό δίκτυο που αποτελείται από δυο συστήματα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη το καθένα, στο οποίο κυκλοφορούν N πελάτες. Οι πελάτες πηγαίνουν από το σύστημα 1 στο σύστημα 2 και μετά ξανά στο σύστημα 1 κ.ο.κ. εσαεί. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης στο σύστημα i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό μ_i, $i = 1,2$. Έστω $Z(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα 1 τη στιγμή t και S_n η n-οστή στιγμή που τελειώνει μια εξυπηρέτηση στο σταθμό 2 (που είναι ισοδύναμα η στιγμή της n-οστής άφιξης στο σταθμό 1). Έστω επίσης $Y_n = Z(S_n^-)$ ο αριθμός των πελατών στο σταθμό 1 μόλις πριν την άφιξη ενός πελάτη από το σταθμό 2. Να αποδειχθεί ότι η $\{(Y_n, S_n)\}$ είναι μια Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία και να βρεθεί ο πυρήνας της $G(x)$.

6. Θεωρούμε ένα σύστημα αξιοπιστίας που αποτελείται από n εξαρτήματα σε σειρά και επομένως λειτουργεί όταν όλα τα εξαρτήματα λειτουργούν. Οι χρόνοι ζωής του εξαρτήματος i είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο λ_i ενώ οι χρόνοι επισκευής ακολουθούν μια συνεχή κατανομή $H_i(x)$, $i = 1,2,\dots,n$. Όταν ένα εξάρτημα υποστεί βλάβη τότε ολόκληρο το σύστημα απενεργοποιείται ακαριαία και αρχίζει να επισκευάζεται το χαλασμένο εξάρτημα. Όταν το σύστημα είναι απενεργοποιημένο τα υπόλοιπα εξαρτήματα δεν χαλάνε. Έστω $Z(t)$ η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t (0: αν το σύστημα λειτουργεί, i: αν η μονάδα i βρίσκεται υπό επισκευή), S_n η n-οστή στιγμή που το σύστημα αλλάζει κατάσταση και $Y_n = Z(S_n^+)$. Να αποδειχθεί ότι η $\{(Y_n, S_n)\}$ είναι μια Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία και να βρεθεί ο πυρήνας της $G(x)$.