Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης
στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα
Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις

Ασκήσεις υπολογισμών στη Μαρκοβιανή ανανεωτική θεωρία

1. Θεωρούμε ένα σύστημα που κινείται κυκλικά στις καταστάσεις 1,2,...,*N*. Κάθε φορά που εισέρχεται στην κατάσταση *i*, ο χρόνος παραμονής του ακολουθεί μια συνεχή κατανομή $H_i(t)$ και κατόπιν μεταβαίνει στην κατάσταση $i+1$ για $i = 1,2,\ldots,N-1$ και στην κατάσταση 1 για $i = N$. Έστω S_n η στιγμή της *n*-οστής μετάβασης και Y_n η αντίστοιχη κατάσταση. Να υπολογιστούν
   (i) οι συναρτήσεις κατανομής $F_{ij}(t)$ των χρόνων πρώτης εισόδου στην κατάσταση *j* ξεκινώντας από την κατάσταση *i* για $i, j = 1,2,\ldots,N$
   (ii) τα όρια $\lim_{t\to\infty} N_j(t)/t$ για $j = 1,2,\ldots,N$, όπου $N_j(t)$ είναι το πλήθος των επισκέψεων στην κατάσταση *j* στο διάστημα $(0,t]$
   (iii) ο μετασχηματισμός LS $\tilde{M}(s)$ της ανανεωτικής συνάρτησης $M(t)$.

2. Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με πίνακα ρυθμών μετάβασης *Q*. Ορίζουμε $M_{ij}(t)$ να είναι ο μέσος αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση *j* στο $(0,t]$ δεδομένου ότι $X(0) = i$ και $M(t) = [M_{ij}(t)]$ τον αντίστοιχο πίνακα συναρτήσεων. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός LS $\tilde{M}(s)$ της $M(t)$, συναρτήσει του *Q*.

3. Εξαρτήματα φθάνουν προς έλεγχο σε ένα σύστημα σύμφωνα με μια Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ (δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων των εξαρτημάτων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο λ). Ένας ελεγκτής επισκέπτεται περιοδικά το σύστημα. Οι χρόνοι διαδοχικών αφίξεων του ελεγκτή είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν εναλλάξ τις κατανομές $F_1(x)$ και $F_2(x)$. Με την άφιξη του ελεγκτή τα παρόντα εξαρτήματα ελέγχονται ακαριαία και απομακρύνονται από το σύστημα. Να βρεθεί η οριακή πιθανότητα να υπάρχουν *n* εξαρτήματα στο σύστημα που περιμένουν να ελεγχθούν.

4. Ένα παράλληλο σύστημα *n* εξαρτημάτων συντηρείται από έναν περιφερόμενο επισκευαστή ως εξής: Κάθε εξάρτημα έχει εκθετικό χρόνο

λειτουργίας με παράμετρο λ και εκθετικό χρόνο επισκευής με παράμετρο μ, ανεξάρτητους από οτιδήποτε άλλο. Όταν ο επισκευαστής έρχεται στο σύστημα μπορεί να επισκευάσει το πολύ r χαλασμένα εξαρτήματα. Αν βρει r ή λιγότερα χαλασμένα τότε τα επισκευάζει όλα. Αν βρει παραπάνω από r χαλασμένα εξαρτήματα τότε επισκευάζει ακριβώς r από αυτά και τα υπόλοιπα περιμένουν την επόμενη επίσκεψή του για να επισκευαστούν. Κατά τη διάρκεια των επισκέψεων του επισκευαστή στο σύστημα, το σύστημα τίθεται εκτός λειτουργίας και επομένως δεν συμβαίνουν νέες βλάβες, ενόσω ο επισκευαστής βρίσκεται στο σύστημα. Αφού τελειώσει τις επισκευές μιας επίσκεψης, ο επισκευαστής φεύγει από το σύστημα για χρονικό διάστημα που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο η. Μετά το διάστημα αυτό επανέρχεται στο σύστημα για την επόμενη επίσκεψη. Να κατασκευάσετε μια κατάλληλη ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία που να απεικονίζει τη λειτουργία του συστήματος και να υπολογίσετε την οριακή πιθανότητα να βρίσκεται ο επισκευαστής στο σύστημα.

5. Για το πόστο του υπεύθυνου πωλήσεων κάποιου καταστήματος μια εταιρεία χρειάζεται έναν υπάλληλο που μπορεί να βρίσκεται σε κάποιο από τέσσερα μισθολογικά κλιμάκια 1,2,3 ή 4, από το χαμηλότερο προς το ψηλότερο. Η παραμονή ενός υπαλλήλου στο μισθολογικό κλιμάκιο i καθορίζεται από δυο τυχαίες μεταβλητές A_i και B_i, όπου η A_i αντιστοιχεί στο χρόνο προαγωγής και η B_i στο χρόνο ανοχής του υπαλλήλου. Ο υπάλληλος μένει στο μισθολογικό κλιμάκιο i για χρονικό διάστημα $\min(A_i, B_i)$ και κατόπιν, στην περίπτωση που $A_i \le B_i$ προάγεται στο μισθολογικό κλιμάκιο $i+1$ ενώ στην περίπτωση που $A_i > B_i$ παραιτείται. Στην περίπτωση που ένας υπάλληλος παραιτηθεί, η εταιρεία προσλαμβάνει άμεσα κάποιον για την κάλυψη της θέσης που αρχίζει από το μισθολογικό κλιμάκιο 1. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει δυνατότητα περαιτέρω προαγωγής στο μισθολογικό κλιμάκιο 4 θεωρούμε ότι $A_4 = \infty$. Έστω $X(t)$ το μισθολογικό κλιμάκιο του υπαλλήλου που καλύπτει τη θέση τη χρονική στιγμή t. Υποθέτοντας ανεξαρτησία για τις εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές και ότι οι κατανομές των A_i και B_i είναι $F_i(x)$ και $G_i(x)$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι η $\{X(t)\}$ είναι ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία και να βρείτε τον πυρήνα της αντίστοιχης ανανεωτικής ακολουθίας. Ακολούθως, να υπολογίσετε την οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$ στην ειδική περίπτωση που η A_i είναι εκθετική με

παράμετρο λ_i για $i = 1,2,3$ και η B_i είναι Erlang με παραμέτρους 2, μ_i για $i = 1,2,3,4$.

6. Έστω $\{Z(t), t \geq 0\}$ μια Μαρκοβιανή αναγεννητική διαδικασία με εμφυτευμένη Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία $\{(Y_n, S_n), n \geq 0\}$ και έστω $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ ο αριθμός των γεγονότων ως τη χρονική στιγμή t και $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι να συμβεί το επόμενο γεγονός στην Μαρκοβιανή ανανεωτική ακολουθία. Να διατυπώσετε μια Μαρκοβιανή ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα $H_{ij}(t) = \Pr[Z(t) = j, R(t) > x \mid Y_0 = i]$ για σταθερό i. Θέτοντας

$$\alpha_{kj}(x) = E[\text{Χρόνος ττη } Z(t) \text{ στο } j \text{ στο } (S_1 - x, S_1), S_1 > x \mid Y_0 = k]$$

να αποδείξετε ότι

$$\lim_{t\to\infty} H_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \alpha_{kj}(x)}{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \mu_k}.$$