Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Ειδίκευσης
στη Στατιστική και την Επιχειρησιακή Έρευνα
Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις

Ασκήσεις στα Martingales

1. Θεωρούμε την ακόλουθη Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων το (0,1): Αν η διαδικασία βρίσκεται στο $p \in (0,1)$ σε κάποιο βήμα, τότε στο επόμενο βήμα θα πηδήσει στην κατάσταση $\alpha + (1-\alpha)p$ με πιθανότητα p ή στην κατάσταση $(1-\alpha)p$ με πιθανότητα $1-p$, όπου $\alpha \in (0,1)$ είναι κάποια δοσμένη σταθερά. Αποδείξτε ότι η διαδικασία αυτή είναι martingale.

2. Θεωρούμε μια κλαδωτή διαδικασία με μετανάστευση $\{W_n : n = 0,1,2,\ldots\}$, δηλαδή W_n είναι το μέγεθος στην αρχή της γενιάς n σε ένα μοντέλο ανάπτυξης πληθυσμού που εξελίσσεται ως
$$W_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^{W_n} X_{n,i},\ n \geq 0,$$
όπου η Y_n αντιστοιχεί στη μετανάστευση κατά τη γενιά n και $X_{n,i}$ είναι ο αριθμός των απογόνων του i ατόμου της γενιάς n, $i = 1,2,\ldots W_n$. Οι τυχαίες μεταβλητές Y_n και $X_{n,i}$, $i = 1,2,\ldots W_n$ θεωρούνται ανεξάρτητες και υποθέτουμε ότι $E[Y_n] = \lambda$ και $E[X_{n,i}] = m$. Να αποδείξετε ότι
(i) Αν $m \neq 1$ τότε $Z_n = m^{-n}\left(W_n - \lambda \frac{1-m^n}{1-m}\right)$ είναι martingale.
(ii) Αν $m = 1$ τότε $Z_n = W_n - \lambda n$ είναι martingale.

3. Έστω $\{X_n\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης $p_{ij} = e^{-1}/(j-i)!$ για $i = 0,1,2,\ldots$ και $j = i, i+1,\ldots$. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες διαδικασίες είναι martingales:
(i) η $\{Y_n\}$ με $Y_n = X_n - n, n = 1,2,\ldots$
(ii) η $\{U_n\}$ με $U_n = Y_n^2 - n, n = 1,2,\ldots$
(iii) η $\{V_n\}$ με $V_n = \exp\{X_n - n(e-1)\}, n = 1,2,\ldots$

4. Έστω $Y_i, i = 1,2,3,\ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\Pr[Y_i = 1] = p \in (0,1)$ και $\Pr[Y_i = -1] = q = 1-p$, με $p \neq q$. Έστω *a*,*b* θετικοί ακέραιοι. Ορίζουμε τον μη συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο $\{S_n\}$ με $S_0 = 0$ και $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, $n \geq 1$ και έστω T η στιγμή που για πρώτη φορά η $\{S_n\}$ μπαίνει στο $-a$ ή στο *b*, δηλαδή,
$$T = \min\{n : S_n = -a \text{ ή } b\}.$$

Αποδείξτε ότι διαδικασία $\{X_n\}$ με $X_n = (q/p)^{S_n}$ είναι martingale. Κατόπιν να βρεθούν οι πιθανότητες $\Pr[X_T = a], \Pr[X_T = b]$ καθώς και η μέση τιμή $E[T]$.

5. Έστω $\{X_n\}$ μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης $p_{ij} = e^{-i} i^j / j!$ για $i = 1,2,\ldots$ και $j = 0,1,2,\ldots$ ενώ $p_{00} = 1$ και $p_{0j} = 0$ για $j = 1,2,\ldots$.
   (α) Να αποδείξετε ότι η $\{X_n\}$ είναι martingale.
   (β) Να αποδείξετε την ανισότητα
   $$\Pr[\max_{0 \le n < \infty} X_n \ge a \mid X_0 = i] \le i/a$$
   για $i, a = 1,2,\ldots$
   (γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ με πιθανότητα 1.

6. Ένα κελί περιέχει αρχικά ένα λευκό και ένα μαύρο σφαιρίδιο. Σε κάθε βήμα, ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από το κελί και μετά επανατοποθετείται σε αυτό μαζί με ένα σφαιρίδιο του ίδιου χρώματος. Έστω Z_n το ποσοστό των λευκών σφαιριδίων μετά το *n*-οστό βήμα. Να αποδείξετε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Z_n\}$ είναι martingale και ακολούθως ότι η πιθανότητα το ποσοστό των λευκών σφαιρών να ξεπεράσει κάποτε το 3/4 είναι το πολύ 2/3.

7. Έστω $Y_i, i = 1,2,3,\ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\Pr[Y_i = 1] = p \in (0,1)$ και $\Pr[Y_i = -1] = q = 1 - p$, με $p > \frac{1}{2} > q$. Έστω b θετικός ακέραιος. Ορίζουμε $S_0 = 0$ και $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, $n \ge 1$ και έστω $T = \min\{n : S_n \ge b\}$. Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση $E[s^T] = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[T = n] s^n$ της *T*.