Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα

Αντώνης Οικονόμου

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

12 Σεπτεμβρίου 2022

Εισαγωγή

Δομή μαθήματος

- Σκοπός του μαθήματος: Επισκόπηση μεθόδων και μοντέλων της Στοχαστικής Επιχειρησιακής Έρευνας
- Eclass: Κωδικός: Stochastic-Models-Operations-Research
- Δομή:
    1. Στοχαστικές διαδικασίες με κόστη (Ανανεωτικές, Μαρκοβιανές)
    2. Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός
    3. Θεωρία Ουρών Αναμονής
    4. Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

Εισαγωγή στην Ανανεωτική Θεωρία

Σημειακές διαδικασίες

- S_k: Χρόνος k-οστού γεγονότος.
- X_k: Ενδιάμεσος χρόνος $(k-1)$-οστού και k-οστού γεγονότος.
- $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots$: Σημειακή διαδικασία (Point process).
- $N(t)$: Πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$, απαριθμήτρια διαδικασία της $\{S_n\}$.

Ανανεωτικές διαδικασίες

- $S_0 \le S_1 \le S_2 \le \ldots$: Σημειακή διαδικασία (Point process).
- S_k: Χρόνος k-οστού γεγονότος.
- X_k: Ενδιάμεσος χρόνος $(k-1)$-οστού και k-οστού γεγονότος.
- $N(t)$: Πλήθος γεγονότων στο $(0, t]$.
- Αν οι X_k, $k = 1, 2, \ldots$, ανεξάρτητες και ισόνομες $\sim F_X(t)$ τότε:
  $\{S_k\}$: Ανανεωτική ακολουθία (Renewal sequence).
  $N(t)$: Απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία (Renewal process).

Βασικοί υπολογισμοί

- Βασικά ερωτήματα:
  $F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] =;$
  $E[S_k] =;$
  $p_k(t) = \Pr[N(t) = k] =;$
  $m(t) = m_X(t) = E[N(t)] =;$ (Ανανεωτική συνάρτηση).

- Σχέση-κλειδί:

$$\{S_k \leq t\} = \{N(t) \geq k\}$$

Ολοκλήρωμα RS

- $F(t)$: αύξουσα, κατά τμήματα συνεχής, δεξιά συνεχής, παραγωγίσιμη (π.χ., συνάρτηση κατανομής μεικτής τ.μ. με διακριτό και απόλυτα συνεχές μέρος).
- $g(t)$: συνεχής συνάρτηση.
- Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της g ως προς F:

$$\int_a^b g(x)dF(x) \stackrel{\text{ορσ}}{=} \sum_x g(x)(F(x) - F(x-)) + \int_a^b g(x)F'(x)dx,$$

με την άθροιση πάνω σε όλα τα σημεία ασυνέχειας της F.

Ολοκλήρωμα RS(συνέχεια)

- Όταν $F(x) = F_X(x)$ (συνάρτηση κατανομής), τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = E[g(X)].$$

Συνέλιξη κατανομών (RS)

- Έστω $X, Y \geq 0$, ανεξάρτητες, με $X \sim F_X(t)$ και $Y \sim F_Y(t)$.
- Η συνέλιξη LS των F_X, F_Y ορίζεται ως

$$(F_X * F_Y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-u) dF_Y(u).$$

- Η συνέλιξη των F_X, F_Y είναι η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των X, Y.
- Προσοχή! Η συνήθης συνέλιξη συναρτήσεων

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) du$$

δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας αθροίσματος τ.μ.

Μετασχηματισμός LS

- Έστω $X \geq 0$, με σ.κ. $F_X(x)$. Ο μετασχηματισμός LS είναι

$$\tilde{F}_X(s) \overset{\text{ορσ}}{=} \int_0^\infty e^{-st} dF_X(t), \quad \Re(s) \geq 0.$$

Ιδιότητες μετασχηματισμών LS

Τυχαία μεταβλητή X	Συνάρτηση $\phi(x)$ (ή $F_X(x)$)	Μετασχηματισμός LS $\tilde{\phi}(s)$ (ή $\tilde{F}_X(s)$)
–	$\phi(x) = x$	$\tilde{\phi}(s) = \frac{1}{s}$
–	$\phi(x) = \int_0^\infty \phi_1(x-u)d\phi_2(u)$	$\tilde{\phi}(s) = \tilde{\phi}_1(s)\tilde{\phi}_2(s)$
–	$\phi(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)$	$\tilde{\phi}(s) = a_1\tilde{\phi}_1(s) + a_2\tilde{\phi}_2(s)$
$X = c \geq 0$	$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < c \\ 1 & \text{αν } x \geq c \end{cases}$	$\tilde{F}_X(s) = e^{-cs}$
$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$
$X \sim \mathrm{Erlang}(n,\lambda)$	$F_X(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}$	$\tilde{F}_X(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$
$Z = X + Y$, αν	$F_Z(z) = \int_0^\infty F_Y(z-x)dF_X(x)$	$\tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s)\tilde{F}_Y(s)$
$Z = \begin{cases} X & \text{πιθ. } p \\ Y & \text{πιθ. } q \end{cases}$	$F_Z(z) = pF_X(z) + qF_Y(z)$	$\tilde{F}_Z(s) = p\tilde{F}_X(s) + q\tilde{F}_Y(s)$

Πίνακας: Συναρτήσεις και αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes.

Βασικοί υπολογισμοί (συνέχεια)

- Κατανομή χρόνων γεγονότων

$$\begin{aligned} F_{S_k}(t) &= \Pr[S_k \leq t] = \Pr[X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq t] \\ &= F_X^{*k}(t). \end{aligned}$$

- Μέση τιμή χρόνων γεγονότων

$$E[S_k] = kE[X].$$

Βασικοί υπολογισμοί (συνέχεια)

- Συνάρτηση πιθανότητας αριθμού γεγονότων

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \Pr[N(t)=k] = \Pr[S_k \le t < S_{k+1}] \\ &= \Pr[S_k \le t] - \Pr[S_{k+1} \le t] = F_X^{*k}(t) - F_X^{*k+1}(t). \end{aligned}$$

- Μέση τιμή αριθμού γεγονότων (ανανεωτική συνάρτηση)

$$\begin{aligned} m(t) &= E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \le t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[S_k \le t] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t). \end{aligned}$$

Μετασχηματισμοί LS βασικών ποσοτήτων

- Ορισμοί

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dF_{S_k}(t), \\
\tilde{p}_k(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dp_k(t), \\
\tilde{m}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dm(t).
\end{aligned}
$$

Βασικοί υπολογισμοί μετασχ. LS

- Υπολογισμοί

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k, \\
\tilde{p}_k(s) &= \widetilde{F_X^{*k}}(s) - \widetilde{F_X^{*k+1}}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k - (\tilde{F}_X(s))^{k+1} \\
&= (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k, \\
\tilde{m}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{F_X^{*k}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^k = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.
\end{aligned}
$$

Μεθοδολογία υπολογισμού βασικών ποσοτήτων

- Με χρήση μετασχηματισμών LS:

$$
\begin{aligned}
F_X(t) \to \tilde{F}_X(s) \to \tilde{F}_{S_k}(s), \tilde{p}_k(s), \tilde{m}_X(s) \\
\to F_{S_k}(t), p_k(t), m_X(t).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

- Ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_k \sim$ Exp(λ)(στοχαστική διαδικασία Poisson ρυθμού λ). $F_{S_k}(t), p_k(t), m_X(t)$;

$$
\begin{aligned}
F_X(t) &= 1 - e^{-\lambda t} \to \\
\tilde{F}_X(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + s} \to \\
\tilde{F}_{S_k}(s) &= (\tilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k, \\
\tilde{p}_k(s) &= (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{k+1} \\
\tilde{m}(s) &= \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{\frac{s}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντιστροφή:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{S_k}(s) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k \quad \rightarrow \quad F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}, \\
\tilde{p}_k(s) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{k+1} \quad \rightarrow \\
p_k(t) &= \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) - \left(1 - \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right) \\
&= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \\
\tilde{m}(s) &= \frac{\lambda}{s} \quad \rightarrow \quad m(t) = \lambda t.
\end{aligned}
$$

Ανανεωτικός συλλογισμός
Ανανεωτικές εξισώσεις

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Ιδέα

- $\{N(t)\}$: Ανανεωτική διαδικασία.
- $h(t)$: συνάρτηση που αναφέρεται στην εξέλιξη της ανανεωτικής διαδικασίας στο $(0, t]$,
  π.χ. $m(t)$ ή $E[S_{N(t)+1} - t]$
- Ανανεωτικός συλλογισμός: Δέσμευση στον χρόνο $S_1 = u$ του πρώτου ανανεωτικού γεγονότος για τον υπολογισμό της ποσότητας.
- Η τεχνική οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις συγκεκριμένου τύπου.

Ανανεωτικός Συλλογισμός - Εξισώσεις

- Ο ανανεωτικός συλλογισμός οδηγεί σε ολοκληρωτικές εξισώσεις του τύπου

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

όπου
$h(t)$: η υπό μελέτη (άγνωστη) ποσότητα,
$d(t)$: μια γνωστή συνάρτηση,
$F_X(t)$: η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων της υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα: Ανανεωτική εξίσωση για την $m(t)$

- $h(t) = m(t)$: ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$,
- S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$,
- $F_X(t)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u] dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(N(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} 1 + N(t-u).$$

- Επομένως,

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u, \\ 1 + E[N(t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = m(t) = \int_0^\infty E[N(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= F_X(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u). \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = F_X(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = F_X(t)$.

- Αναφέρεται ως η ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση.

Παράδ: Αναν. εξίσωση για $R(t) = E[S_{N(t)+1} - t]$

- $h(t) = E[R(t)] = E[S_{N(t)+1} - t]$: μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t, δηλαδή ο μέσος χρόνος που απαιτείται για το επόμενο ανανεωτικό γεγονός από τη στιγμή t.
- S_1: ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της $\{N(t)\}$.
- $F_X(t)$: η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t)\}$.
- Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u]dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Όταν $u \leq t$, τότε

$$(R(t)|S_1 = u) \stackrel{d}{=} R(t-u).$$

- Επομένως,

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t-u)], & \text{αν } t \geq u. \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας την

$$E[R(t)|S_1 = u] = \begin{cases} u - t, & \text{αν } t < u, \\ E[R(t-u)], & \text{αν } t \geq u, \end{cases}$$

στην

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^\infty E[R(t)|S_1 = u] dF_X(u),$$

παίρνουμε την

$$h(t) = \int_t^\infty (u-t) dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η εξίσωση

$$h(t) = \int_t^\infty (u-t)dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u)$$

είναι ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με

$$\begin{aligned} d(t) &= \int_t^\infty (u-t)dF_X(u) = \int_t^\infty \int_t^u dy dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty \int_y^\infty dF_X(u)dy = \int_t^\infty (1-F_X(y))dy. \end{aligned}$$

Λύση ανανεωτικής εξίσωσης

- Ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t).$$

- Μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t),$$

$m_X(t)$: η ανανεωτική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $F_X(t)$.

Λύση ανανεωτικής εξίσωσης - Αιτιολόγηση

$$
\begin{aligned}
& h(t) = d(t) + (h * F_X)(t) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\tilde{F}_X(s) \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \tilde{d}(s)\frac{1-\tilde{F}_X(s)+\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}. \\
\Rightarrow \quad & \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\tilde{m}_X(s) \\
\Rightarrow \quad & h(t) = d(t) + (d * m_X)(t).
\end{aligned}
$$

Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης - λύσης

- Έστω ότι κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ επάγει μια επίδραση που διαχέεται στον χρόνο.
- $d(t)$: Επίδραση ενός γεγονότος t χρονικές μονάδες μετά την εκδήλωσή του.
- $h(t)$: Συνολική επίδραση από όλα τα γεγονότα μέχρι τη στιγμή t.
- Έστω ότι συμβαίνει γεγονός (γεγονός-0) τη στιγμή 0.

Ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης (συνέχεια)

- Συνολική επίδραση τη στιγμή t
  = Επίδραση από γεγονός-0 + Συνολική επίδραση από τα υπόλοιπα γεγονότα.
- Ανανεωτική εξίσωση:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u).$$

Ερμηνεία λύσης (συνέχεια)

- Συνολική επίδραση τη στιγμή t
= Επίδραση από γεγονός-0 + Άθροισμα επιδράσεων από τα υπόλοιπα γεγονότα.
- Λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)\,dF_{S_k}(u) \\
&= d(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t d(t-u)\,dF_X^{*k}(u) \\
&= d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u).
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ανανεωτική εξίσωση για μέσο υπολειπόμενο χρόνο ανανέωσης $h(t) = E[R(t)]$:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t),$$

με $d(t) = \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy$

- Λύση ανανεωτικής εξίσωσης:

$$\begin{aligned} h(t) &= d(t) + \int_0^t d(t-u)dm_X(u) \\ &= \int_t^\infty (1 - F_X(y))dy + \int_0^t \int_{t-u}^\infty (1 - F_X(y))dydm_X(u). \end{aligned}$$

- Δύσχρηστος.Συχνά ενδιαφέρει μόνο η οριακή λύση, $\lim_{t\to\infty} E[R(t)]$.

Υπολογισμοί ανανεωτικών συναρτήσεων

- Υπολογισμός $m_X(t)$: Απαραίτητος για τη χρήση λύσεων ανανεωτικών εξισώσεων.
- 3 βασικοί τρόποι:
  1. Αρχικός τύπος:
  $$m_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).$$
  2. Τύπος μετασχηματισμού LS + Αντιστροφή:
  $$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}.$$
  3. Ανάν. εξίσωση + Μετατροπή σε διαφορική + Λύση:
  $$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)dF_X(u).$$

Παράδειγμα υπολογισμού αναν. συνάρτησης

- $X \sim \text{Hyperexponential}(p, \lambda, q, \mu)$,δηλ.

$$X = \begin{cases} Y \sim \text{Exp}(\lambda) & \text{με πιθ. } p, \\ Z \sim \text{Exp}(\mu) & \text{με πιθ. } q. \end{cases}$$

οπότε

$$F_X(t) = pF_Y(t) + qF_Z(t).$$

- $m_X(t) =;$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Με τον αρχικό τύπο:

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(pF_Y + qF_Z)^{*k}(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}p^j q^{k-j}(F_Y^{*j} * F_Z^{*k-j})(t) \\
&= \cdots,
\end{aligned}
$$

$F_Y^{*j}(t)$: Συνάρτηση κατανομής της Erlang(j,λ),
$F_Z^{*k-j}(t)$: Συνάρτηση κατανομής της Erlang$(k-j,\mu)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Με τον τύπο του μετασχηματισμού LS:

$$\tilde{m}_X(t) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}.$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{F}_X(s) &= p\tilde{F}_Y(s) + q\tilde{F}_Z(s)\\ &= p\frac{\lambda}{\lambda+s} + q\frac{\mu}{\mu+s}.\end{aligned}$$

- Άρα

$$\tilde{m}_X(s) = \cdots = \frac{(\lambda p + \mu q)s + \lambda\mu}{s(s+\lambda q + \mu p)}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda q + \mu p} = \frac{A(s + \lambda q + \mu p) + Bs}{s(s + \lambda q + \mu p)}.$$

- Εύρεση των σταθερών:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_X(s) &= \frac{(\lambda p + \mu q)s + \lambda\mu}{s(s + \lambda q + \mu p)} = \frac{A(s + \lambda q + \mu p) + Bs}{s(s + \lambda q + \mu p)} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A + B & = \lambda p + \mu q \\ (\lambda q + \mu p)A & = \lambda\mu \end{array} \right\} \Rightarrow A, B = \cdots . \end{aligned}$$

- Αντιστροφή:

$$m_X(t) = At + \frac{B}{\lambda q + \mu p}(1 - e^{-(\lambda q + \mu p)t}).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αναν. εξίσωση + Μετατροπή σε διαφορική + Λύση:

$$
\begin{aligned}
& m_X(t) = F_X(t) + (F_X * m_X)(t) \\
\Rightarrow \quad & m_X(t) = 1 - pe^{-\lambda t} - qe^{-\mu t} \\
& \qquad + \int_0^t \left(1 - pe^{-\lambda(t-u)} - qe^{-\mu(t-u)}\right) m'_X(u)du \\
\Rightarrow \quad & \cdots
\end{aligned}
$$