Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους

Ανανεωτική διαδικασία κόστους

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων.
- $X_1, X_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $\{C(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία κόστους (συμβατή με την $\{N(t)\}$)

  $$\Updownarrow$$

  (X_n, C_n), $n \geq 1$ ανεξάρτητες τ.μ., όπου $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$.
- $F_{X,C}(x, y)$ σ.κ. των (X_n, C_n): γεννώσα συνάρτηση κατανομής της $\{C(t)\}$.

Αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων.
- $X_1, X_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $Y_1, Y_2, \ldots$: ανεξ. ισον., ανεξ. της $\{N(t)\}$.
- $g(x, y)$: συνάρτηση.
- Η $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i),\ t \geq 0,$$

  αναφέρεται ως αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους.
- Στο n-οστό γεγονός επάγεται κόστος $g(X_n, Y_n)$.

Ειδικές περιπτώσεις:

- $g(x,y) = 1 \Rightarrow C(t) = N(t)$ ανανεωτική διαδικασία.
- $g(x,y) = y \Rightarrow C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ σύνθετη ανανεωτική διαδικασία.
  Π.χ.
  1. $N(t)$: πλήθος ζημιών σε ασφαλιστική εταιρεία, Y_i: ύψος i-οστής ζημιάς.
  2. $N(t)$: πλήθος αφικνούμενων ομάδων σε σύστημα, Y_i: μέγεθος i-οστής ομάδας.
  3. $N(t)$: πλήθος παραγγελιών Y_i: μέγεθος i-οστής παραγγελίας.
- $g(x,y) = 1_{\{y>t\}}$.

Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη (ΣΑΘΚ)

- $\{C(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία κόστους.
- (X, C): τυπικό ζεύγος διάρκειας ανανεωτικού κύκλου και αντίστοιχης αμοιβής.
- $F_{X,C}(x, y)$: κατανομή (X, C).
- Υποθέσεις: $E[X] < \infty$ και $E[C] < \infty$.
- Τότε:
  1. Για τον μακροπρόθεσμο ρυθμό κόστους έχουμε
  $$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}, \text{ με πιθανότητα 1.}$$
  2. Για τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους έχουμε
  $$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Ντετερμινιστικό ανάλογο του ΣΑΘΚ

- $c(t)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο x.
- Τότε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t c(u)du}{t} = \frac{\int_0^x c(u)du}{x}.$$

Αναγεννητικές διαδικασίες

Αναγεννητικές διαδικασίες - Ορισμός

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία

$$\Updownarrow$$

$\exists\ S_1 \geq 0$ με $\Pr[S_1 = 0] < 1$ και $\Pr[S_1 < \infty] = 1$:

1. οι $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες, και
2. $\{X(t) : 0 \leq t < S_1\}$ και $\{X(t + S_1) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες.

- Διαισθητικά:
$\{X(t)\}$ αναγεννητική $\Leftrightarrow \exists\ S_1$ ώστε από το S_1 και μετά η εξέλιξή να είναι σαν να ξεκινούσε από το 0.

Ανανεωτική διαδικασία αναγεννητικών σημείων

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική
  $\Downarrow$
  $\exists\ S_1 \leq S_2 \leq \ldots$:
  1. $\{X(t) : t \geq 0\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ στοχαστικά ισοδύναμες,
  2. $\{X(t) : 0 \leq t < S_n\}$ και $\{X(t + S_n) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες.
- Τα $S_1, S_2, \ldots$ λέγονται αναγεννητικά σημεία.
- Η $\{N(t)\}$ με

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\},\ t \geq 0,$$

είναι η ανανεωτική διαδικασία των αναγεννητικών σημείων.

Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας I

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με καταστάσεις στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια.
- Οριακή δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}} du}{t}, \ x \in \mathbb{R}, \ (\text{τ.μ.})$$

(μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που $\{X(t)\} \leq x$).

- Οριακή μέση δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}} du\right]}{t}, \ x \in \mathbb{R}, \ (\text{αριθμός})$$

(μακροπρόθ. μέσο ποσοστό χρόνου που $\{X(t)\} \leq x$).

Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας II

- Οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t \to \infty} \Pr[X(t) \leq x], \; x \in \mathbb{R}, \; (\text{αριθμός}),$$

(πιθανότητα μια μακρινή χρονική στιγμή η $\{X(t)\}$ να είναι σε κατάσταση $\leq x$).

- C-οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u) \leq x] du}{t}, \; x \in \mathbb{R}, \; (\text{αριθμός})$$

(πιθανότητα μια χρονική στιγμή ομοιόμορφα επιλεγμένη σε μεγάλο διάστημα η $\{X(t)\}$ να είναι σε κατάσταση $\leq x$).

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών I

- $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με καταστάσεις στο $\mathbb{R}$ και δεξιά συνεχείς πραγματοποιήσεις με αριστερά όρια.
- S ο 1ος χρόνος αναγέννησης.
- Η τ.μ.

$$\int_0^S 1_{\{X(u)\leq x\}} du$$

εκφράζει τον συνολικό χρόνο στο $(0,S]$ που η $\{X(t)\}$ είναι το πολύ x.

- Αν $E[S]<\infty$, ορίζουμε

$$F_X(x) = \frac{E[\int_0^S 1_{\{X(u)\leq x\}} du]}{E[S]}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$.

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών II

- Τότε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}} du}{t} = F_X(x), \quad \text{με πιθανότητα } 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)\leq x\}} du]}{t} = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

και

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Pr[X(u) \leq x] du}{t} = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών III

- Αν, επιπλέον, η κατανομή του S είναι απεριοδική,δηλ. δεν υπάρχει $a > 0$ ώστε $\sum_{n=0}^{\infty} \Pr[S = na] = 1$, τότε

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[X(t) \leq x] = F_X(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Συνοπτικά:
  Εργοδικό θεώρημα αναγεννητικών διαδικασιών:
  Όλες οι οριακές κατανομές μιας αναγεννητικής διαδικασίας είναι ίσες.

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας I

- $\{X(t)\}$: αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστ. $\mathbb{R}$.
- $c(x)$: άνω ή κάτω φραγμένη συνάρτηση που εκφράζει το κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής της $\{X(t)\}$ στην κατάσταση x.
- Συνολικό κόστος που συσσωρεύεται στο $(0, t]$:

$$C(t) = \int_0^t c(X(u))du \text{ (τ.μ.)}.$$

- X τ.μ. με την κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$.

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας II

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = E[c(X)], \text{ με πιθανότητα } 1. \tag{2}$$

- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = E[c(X)]. \tag{3}$$

Ρυθμός κόστους αναγεννητικής διαδικασίας III

- Η μέση τιμή $E[c(X)]$ υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
E[c(X)] &= \frac{E[\int_0^S c(X(u))du]}{E[S]} = \frac{E[C(S)]}{E[S]} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c(x)dF_X(x) \\
&= \begin{cases} \sum_x c(x) f_X(x) & \text{αν } X \text{ διακριτή,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} c(x) f_X(x) dx & \text{αν } X \text{ συνεχής,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

όπου S ο χρόνος 1ης αναγέννησης της $\{X(t)\}$.

- Αν η κατανομή του S απεριοδική:

$$E[c(X)] = \lim_{t\to\infty} E[c(X(t))].$$

Εφαρμογές ανανεωτικών διαδικασιών κόστους και αναγεννητικών διαδικασιών

Αντικατάσταση μηχανήματος I

- Μηχανή με χρόνους λειτ. $O_1, O_2, \ldots$ (oper. times) και χρόνους επισκευής $D_1, D_2, \ldots$ (down times).
- Αντικατάσταση όταν χαλάσει ή όταν περάσει χρόνος s.
- Κόστη ανά αντικατάσταση:
  c_f (για βλάβη - failure),
  c_p (προληπτικά - preventive maintenance).
- (O_n, D_n) ανεξ. ισόν. $\sim F_{O,D}(x,y)$.
- $C(t)$: Κόστος για τις αντικαταστάσεις στο $(0,t]$.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $=$;
- Βέλτιστο $s =$;

Αντικατάσταση μηχανήματος II

- S_n: χρονική στιγμή ολοκλήρωσης n-οστής αντικατάστασης.
- Τότε:

$$\begin{aligned} X_n &= S_n - S_{n-1} = \min(O_n, s) + D_n, \;\; n \geq 1, \\ C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = c_f 1_{\{O_n \leq s\}} + c_p 1_{\{O_n > s\}}, \;\; n \geq 1. \end{aligned}$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισον.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.$$

Αντικατάσταση μηχανήματος III

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[\min(O,s)] + E[D] \\
&= \int_0^\infty \Pr[\min(O,s) > t]dt + \int_0^\infty \Pr[D > t]dt \\
&= \int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt, \\
E[C] &= c_f \Pr[O_n \leq s] + c_p \Pr[O_n > s] \\
&= c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s)),
\end{aligned}$$

- Επομένως

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{c_f F_O(s) + c_p(1 - F_O(s))}{\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt}.$$

Αντικατάσταση μηχανήματος IV

- Κόστος ως συνάρτηση του s:

$$c(s) = \frac{c_p + (c_f - c_p)F_O(s)}{\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt}.$$

- $\int_0^s (1 - F_O(t))dt + \int_0^\infty (1 - F_D(t))dt \uparrow s$.
- $c_p + (c_f - c_p)F_O(s) \uparrow s$, όταν $c_f > c_p$,
  $c_p + (c_f - c_p)F_O(s)$ σταθερή, όταν $c_f = c_p$,
  $c_p + (c_f - c_p)F_O(s) \downarrow s$, όταν $c_f < c_p$.
- $c_f \leq c_p$ (δεν συμβαίνει στις εφαρμογές) $\Rightarrow c(s) \downarrow s$.Τότε βέλτιστο ∞.
- $c_f > c_p$ (τυπικό στις εφαρμογές) $\Rightarrow$Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της $c(s)$ κλπ.

Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία I

- Μηχανή με χρόνους λειτ. $O_1, O_2, \ldots$ (oper. times) και χρόνους επισκευής $D_1, D_2, \ldots$ (down times).
- (O_n, D_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν. $\sim F_{O,D}(x, y)$.
- Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου λειτουργίας της μηχανής $=$;

Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία II

- Αναγεννητικά σημεία: Σημεία επαναλειτ. μηχανής.
- S_n: χρόνος λήξης n-οστής αντικατάστασης.
- $C(t)$: χρόνος λειτουργίας της μηχανής στο $(0, t]$.
- Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
X_n &= S_n - S_{n-1} = O_n + D_n, \; n \geq 1, \\
C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n, \; n \geq 1.
\end{aligned}
$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$
\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{E[O]}{E[O] + E[D]}.
$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων I

- $\{A(t)\}$: αναν. διαδ. αφίξεων αντικειμένων σε αποθήκη.
- $Y_1, Y_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι.
- $E[Y_i] = \mu$.
- Ακαριαία εκκαθάριση αποθήκης μόλις συγκεντρωθούν m προϊόντα.
- K: εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση.
- k: κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος.
- h: κόστος φύλαξης ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $=$;
- Βέλτιστο $m =$;

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων II

- $\{N(t)\}$: αναν. διαδ. πλήθους εκκαθαρίσεων αποθήκης.
- S_n: χρόνος n-οστής εκκαθάρισης.
- $C(t)$: κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$.
- $Y_{n,i}$: ενδιάμεσος χρόνος της $\{A(t)\}$ πριν την άφιξη του i-οστού αντικειμένου που φθάνει στον n-οστο κύκλο (δηλαδή μεταξύ $n-1$-οστής και n-οστής εκκαθάρισης).

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων III

- Τότε:

$$
\begin{aligned}
X_n &= \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}, \; n \geq 1, \\
C_n &= K + mk + h \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}, \; n \geq 1.
\end{aligned}
$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$
\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.
$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων IV

- Υπολογισμοί:

$$
\begin{aligned}
E[X_n] &= E\left[\sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}\right] = m\mu, \quad n \geq 1, \\
E[C_n] &= E\left[K + mk + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}\right] \\
&= K + mk + h\sum_{i=1}^{m}(m-i)\mu \\
&= K + mk + h\frac{(m-1)m}{2}\mu, \quad n \geq 1,
\end{aligned}
$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του m:

$$
c(m) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}.
$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε αριθμό προϊόντων V

- Συνεχής επέκταση της $c(m)$ και παράγωγοι:

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{K}{\mu x} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2}, \\ c'(x) &= -\frac{K}{\mu x^2} + \frac{h}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{\mu x^3}, \end{aligned}$$

- $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\mu}}.$$

- Βέλτιστο m: $m^* = \lfloor x^* \rfloor$ ή $m^* = \lceil x^* \rceil$.

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο I

- $\{A(t)\}$: Poisson διαδ. αφίξεων αντικειμένων σε αποθήκη με ρυθμό λ.
- $m = \frac{1}{\lambda}$: Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων αντικειμένων.
- Ακαριαία εκκαθάριση αποθήκης κάθε x χρονικές μονάδες.
- K: εφάπαξ κόστος ανά εκκαθάριση.
- k: κόστος ανά εκκαθάριση προϊόντος.
- h: κόστος φύλαξης ανά προϊόν και χρονική μονάδα παραμονής του στην αποθήκη.
- Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $=$;
- Βέλτιστο $x =$;

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο II

- $\{N(t)\}$: αναν. διαδ. πλήθους εκκαθαρίσεων αποθήκης.
- $S_n = nx$: χρόνος n-οστής εκκαθάρισης.
- $C(t)$: κόστος λειτουργίας της αποθήκης στο $(0, t]$.

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο III

- Τότε:

$$
\begin{aligned}
X_n &= S_n - S_{n-1} = x,\ n \geq 1, \\
C_n &= C(S_n) - C(S_{n-1}) \\
&= K + k(A(nx) - A((n-1)x)) \\
&\quad + h \int_0^x (A((n-1)x + u) - A((n-1)x) du,\ n \geq 1.
\end{aligned}
$$

- (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξ. ισόν.
- ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$
\lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}.
$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο IV

- Υπολογισμοί:

$$
\begin{aligned}
E[X_n] &= x, \quad n \geq 1, \\
E[C_n] &= K + kE[A(nx) - A((n-1)x)] \\
&\quad + h \int_0^x E[A((n-1)x + u) - A((n-1)x] du \\
&= K + k\lambda x + h \int_0^x \lambda u du \\
&= K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}, \quad n \geq 1,
\end{aligned}
$$

- Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του x:

$$
c(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}.
$$

Εκκαθάριση αποθήκης σε σταθερό χρόνο V

- Παραγώγιση της $c(x)$

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{K}{x} + k\lambda + \frac{h\lambda x}{2}, \\ c'(x) &= -\frac{K}{x^2} + \frac{h\lambda}{2}, \\ c''(x) &= \frac{2K}{x^3}. \end{aligned}$$

- $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο

$$x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\lambda}}.$$

- Αναμενόμενος αριθμός συσσωρευμένων αντικειμένων:

$$\lambda x^* = \sqrt{2K\lambda/h} = \sqrt{2K/hm}.$$

Τύπος σε συμφωνία με το μοντέλο εκκαθάρισης