Παρελθών, υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης - Ορισμοί

- $\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδικασία.
- $X_1, X_2, \ldots$: ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων $\sim F_X(x)$.
- $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$.
- $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$: χρόνοι γεγονότων.
- Ορίζουμε:

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0, \\ T(t) &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Παρελθών, υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης - Ερμηνείες

- Μαθηματικοί ορισμοί:

$$\begin{aligned} A(t) &= t - S_{N(t)}, \quad t \geq 0, \\ R(t) &= S_{N(t)+1} - t, \quad t \geq 0, \\ T(t) &= S_{N(t)+1} - S_{N(t)}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

- Ερμηνείες:
  - $A(t)$: ηλικία (παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης - age), χρόνος από το προηγούμενο γεγονός.
  - $R(t)$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης (προδρομικός χρόνος ανανέωσης - remaining renewal time ή residual renewal time), χρόνος ως το επόμενο γεγονός.
  - $T(t)$: t-εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος (ολικός - total renewal time), χρόνος από το προηγούμενο ως το επόμενο γεγονός.

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Έχουμε δείξει ότι για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων:

$$\text{Ανανεωτική εξίσωση για } E[R(t)] + \text{ΒΑΘ}$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}.$$

- Επειδή $\{R(t)\}$ αναγεννητική, το όριο αυτό είναι ίσο με το

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t},$$

που υπολογίζεται ευκολότερα με ΣΑΘΚ.

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Από αναγεννητικότητα της $\{R(t)\}$:

$$\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t}.$$

- Ορίζουμε διαδικασία κόστους $C(t) = \int_0^t R(u)du$.
- Έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t} \overset{\Sigma\text{A}\Theta\text{K}}{=} \frac{E\left[\int_0^X R(u)du\right]}{E[X]}.$$

Οριακή μέση τιμή του $R(t)$

- Υπολογισμοί:

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} E[R(t)] &= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t R(u)du\right]}{t} \\
&= \frac{E\left[\int_0^X R(u)du\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E\left[\int_0^X (X-u)du\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E\left[\frac{X^2}{2}\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E[X^2]}{2E[X]} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}.
\end{aligned}
$$

Οριακή κατανομή του $R(t)$

- Για συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων:

$$\text{Ανανεωτική εξίσωση για } \Pr[R(t) \leq x] + \text{ΒΑΘ}$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) \leq x] = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u))du}{\mu}.$$

- Επειδή $\{R(t)\}$ αναγεννητική, το όριο αυτό είναι ίσο με το

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\leq x\}} du\right]}{t},$$

που υπολογίζεται ευκολότερα με ΣΑΘΚ.

Οριακή κατανομή του $R(t)$

- Υπολογισμοί:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) \le x] &= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}} du\right]}{t} \\
&= \frac{E\left[\int_0^X 1_{\{R(u)\le x\}} du\right]}{E[X]} \\
&= \frac{E\left[\min(X,x)\right]}{E[X]} \\
&= \frac{\int_0^\infty \Pr[\min(X,x) > u] du}{E[X]} \\
&= \frac{\int_0^x \Pr[X > u] du}{E[X]} = \frac{\int_0^x (1 - F_X(u)) du}{\mu}.
\end{aligned}$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου

Ορισμός Μ.α.δ.χ.

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου (Μ.α.δ.χ.) με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ αν
  1. $X_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$, και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο,
  2. $\Pr[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$, $n \geq 0$, $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in \mathcal{S}$ (Μαρκοβιανή ιδιότητα).
- Αν οι $\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i]$ δεν εξαρτώνται από το n, η Μ.α.δ.χ. λέγεται ομογενής.
  Τότε συμβολίζουμε:

$$p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

- Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετήσουμε μόνο ομογενείς Μ.α.δ.χ.

Βασικά στοιχεία Μ.α.δ.χ.

- Για να προσδιοριστεί μια Μ.α.δ.χ. $\{X_n\}$ χρειαζόμαστε:
  1. Αρχική κατανομή:
  $$\pi^{(0)} = (\pi_i^{(0)}) \text{ με } \pi_i^{(0)} = \Pr[X_0 = i].$$
  2. Πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης (1ης τάξης):
  $$\mathbf{P} = (p_{ij}), \text{ με } p_{ij} = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

- Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε:
  1. Μεταβατική κατανομή:
  $$\pi^{(n)} = (\pi_i^{(n)}) \text{ με } \pi_i^{(n)} = \Pr[X_n = i].$$
  2. Πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης m-ης τάξης):
  $$\mathbf{P} = (p_{ij}^{(m)}), \text{ με } p_{ij}^{(m)} = \Pr[X_{n+m} = j | X_n = i].$$

Πιθανότητα μονοπατιού Μ.α.δ.χ.

- Η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός συγκεκριμένου μονοπατιού $i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n$ είναι

  $$\Pr[X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n] = \pi_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

  (από πολλαπλασιαστικό νόμο).

Πιθανότητες n-οστής τάξης Μ.α.δ.χ. I

- Οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης υπολογίζονται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j, \\ 0 & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \\
p_{ij}^{(1)} &= p_{ij}, \\
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{r \in \mathcal{S}} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1,
\end{aligned}
$$

(από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας).

Πιθανότητες n-οστής τάξης Μ.α.δ.χ. II

- Οι πιθανότητες μετάβασης n-οστής τάξης σε πινακική μορφή υπολογίζονται ως

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{I}, \\
\mathbf{P}^{(1)} &= \mathbf{P}, \\
\mathbf{P}^{(n)} &= \mathbf{P}^{(k)}\mathbf{P}^{(n-k)}, \ n \geq 2, \ 1 \leq k \leq n-1.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}, \ n \geq 0.$$

Μεταβατική κατανομή Μ.α.δ.χ.

- Οι μεταβατικές πιθανότητες υπολογίζονται από τη σχέση

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)},$$

(από Θεώρημα Ολικής πιθανότητας),που γράφεται σε πινακική μορφή ως

$$(\pi^{(n)})^T = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^{(n)} = (\pi^{(0)})^T \mathbf{P}^n.$$

Μέσοι αριθμοί επισκέψεων Μ.α.δ.χ.

- Μέσος αριθμός επισκέψεων στην j στα πρώτα n βήματα ξεκινώντας από την i:

$$m_{ij}^{(n)} = E\left[\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} | X_0 = i\right].$$

- Οι μέσοι αριθμοί επισκέψεων υπολογίζονται ως:

$$m_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}.$$

- Σε μορφή πινάκων:

$$\mathbf{M}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^k.$$

Επικοινωνία καταστάσεων - Κλάσεις

- $\{X_n\}$ Μ.α.δ.χ. με χ.κ. $\mathcal{X}$, πίνακα $\mathbf{P}$.
- $i \to j$ (j προσπελάσιμη από την i) $\Leftrightarrow \exists n \geq 0$: $p_{ij}^{(n)} > 0$ $\Leftrightarrow \exists i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$: $p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} j} > 0$.
- $i \leftrightarrow j$ (i, j επικοινωνούν) $\Leftrightarrow i \to j$ και $j \to i$.
- Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας $\Rightarrow$ ο $\mathcal{X}$ διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας (αδιαχώριστες κλάσεις).
- Μια Μ.α.δ.χ. με μοναδική κλάση επικοινωνίας λέγεται αδιαχώριστη (όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν).
- Μια κλάση $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ λέγεται κλειστή αν δεν υπάρχουν $i \in \mathcal{C}$ και $j \notin \mathcal{C}$, με $p_{ij} > 0$, αλλιώς λέγεται ανοικτή.

Χρόνοι απορρόφησης

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ., με χ.κ. $\mathcal{X}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P} = (p_{ij})$.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$.
- Ορίζουμε:

$$T_{\mathcal{C}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \mathcal{C}\},$$

τον χρόνο πρώτης εισόδου ή απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στο $\mathcal{C}$,

$$h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

την πιθανότητα εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i,και

$$m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X_0 = i], \quad i \in \mathcal{X},$$

τον μέσο χρόνο πρώτης εισόδου/απορρόφησης στο $\mathcal{C}$, ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Πιθανότητες πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$, με $h_i(\mathcal{C}) = \Pr[T_{\mathcal{C}} < \infty | X_0 = i]$.
- Η $\mathbf{h}(\mathcal{C}) = (h_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x_i &= 1, \ i \in \mathcal{C}, \\ x_i &= \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} x_j, \ i \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Μέσοι χρόνοι πρώτης εισόδου/απορρόφησης

- $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$, με $m_i(\mathcal{C}) = E[T_{\mathcal{C}} | X_0 = i]$.
- Η $\mathbf{m}(\mathcal{C}) = (m_i(\mathcal{C}))$ είναι η ελάχιστη μη-αρνητική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} y_i &= 0, \ i \in \mathcal{C}, \\ y_i &= 1 + \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} y_j, \ i \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Χρόνοι επανόδου σε κατάσταση

- Έστω $X_0 = j$.
- Ορίζουμε:

$$R_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\},$$

τον χρόνο επανόδου της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην j,

$$h_j = \Pr[R_j < \infty | X_0 = j],$$

την πιθανότητα επανόδου στην j,και

$$m_j = E[R_j | X_0 = j],$$

τον μέσο χρόνο επανόδου στην j.

Σύνδεση χρόνων 1ης εισόδου και επανόδου

- Για συγκεκριμένο j, θεωρούμε τη Μ.α.δ.χ. που προκύπτει αν τροποποιήσουμε την αρχική, κάνοντας την j απορροφητική.
- Για τη νέα Μ.α.δ.χ. υπολογίζουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $h_i(\{j\})$ και τους μέσους χρόνους απορρόφησης $m_i(\{j\})$.
- Τότε:

$$
\begin{aligned}
h_j &= \sum_{i\in\mathcal{X}} p_{ji} h_i(\{j\}), \\
m_j &= 1 + \sum_{i\in\mathcal{X}} p_{ji} m_i(\{j\}).
\end{aligned}
$$

Επαναληπτικότητα - παροδικότητα

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ.
- j κατάσταση της $\{X_n\}$, με πιθανότητα επανόδου h_j και μέσο χρόνο επανόδου m_j.
    1. j θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow h_j = 1$ και $m_j < \infty$.
    2. j μηδενικά επαναληπτική $\Leftrightarrow h_j = 1$ και $m_j = \infty$.
    3. j παροδική $\Leftrightarrow h_j < 1$.

Ιδιότητες επαναληπτικότητας - παροδικότητας

- Οι ιδιότητες της θετικής επαναληπτικότητας, της μηδενικής επαναληπτικότητας και της παροδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας: $i \leftrightarrow j \Rightarrow i$ και j ίδιου τύπου.
- $\mathcal{C}$ ανοικτή κλάση $\Rightarrow \mathcal{C}$ παροδική.
- $\mathcal{C}$ πεπερασμένη κλειστή κλάση $\Rightarrow \mathcal{C}$ θετικά επαναληπτική.
- $\mathcal{C}$ άπειρη κλειστή κλάση $\Rightarrow$ ανοικτά όλα τα ενδεχόμενα.

Περιοδικότητα - Απεριοδικότητα

- $\{X_n : n \geq 0\}$ Μ.α.δ.χ.
- j κατάσταση της $\{X_n\}$.

$$d_j = \mathrm{MK\Delta}\{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

1. j απεριοδική $\Leftrightarrow d_j = 1$.
2. j περιοδική με περίοδο $d_j \Leftrightarrow d_j > 1$.

- $p_{jj} > 0 \Rightarrow j$ απεριοδική ($\not\Leftarrow$).
- Οι ιδιότητες απεριοδικότητας, περιοδικότητας είναι ιδιότητες των κλάσεων επικοινωνίας:$i \leftrightarrow j \Rightarrow d_i = d_j$.