Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Περιγραφή

- Επενδυτής με κεφάλαιο y χρηματικών μονάδων (1 πόρος).
- Κατανομή σε N δραστηριότητες.
- Επένδυση x χρημ. μον. στην επιλογή $n \to$ αναμενόμενη απόδοση $r_n(x)$.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης συνολικής απόδοσης.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: το πλήθος N των δραστηριοτήτων.
- Στάδιο: το πλήθος n των υπόλοιπων δραστηριοτήτων για την επένδυση του εναπομείναντος κεφαλαίου.
- Κατάσταση: το εναπομείναν κεφάλαιο x για επένδυση στις υπόλοιπες δραστηριότητες.
- Αρχική κατάσταση: y.
- Απόφαση: Το ποσό a που θα επενδυθεί στη δραστηριότητα n.
- Δυναμική: $x \xrightarrow{a} x - a$.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$ η μέγιστη συνολική απόδοση, ξεκινώντας από εναπομείναν κεφάλαιο x για επένδυση στις υπόλοιπες n δραστηριότητες.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Μοντελοποίηση

- Πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού (π.μ-γ.π):

$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{n=1}^{N} r_n(a_n) \\ \text{υπό} & \\ & \sum_{n=1}^{N} a_n \leq y \\ & a_n \geq 0,\ n = 1, 2, \ldots, N. \end{array}$$

- Πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού, εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y, \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r_n(a) + v_{n-1}(x-a)], \\ & \qquad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Συμμετρική περίπτωση, αύξουσα κυρτή απόδοση

- Ειδική περίπτωση:
  $r_n(a) = r(a)$, $n = 1, 2, \ldots$
  $r(a) \geq 0$, αύξουσα κυρτή, $r(0) = 0$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y \\ v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r(a) + v_{n-1}(x-a)], \\ &\qquad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = 0, \; 0 \le x \le y,$$

- Για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_1(x) = r(x), \; 0 \le x \le y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x, \; 0 \le x \le y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Για $n = 2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_2(x) = \max_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)], \; 0 \le x \le y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \; a \in [0,x].$$

- Αν $r(x)$ παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή τότε $\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x-a)$.
- $\frac{df(a)}{da} = 0 \Rightarrow r'(a) = r'(x-a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$. $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Οπότε για την

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \; a \in [0, x],$$

έχουμε $f(a) \downarrow [0, \frac{x}{2})$ και $\uparrow (\frac{x}{2}, x]$.

- Άρα το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται για $a = 0$ ή $a = x$.
- Επομένως

$$v_2(x) = r(x), \; 0 \leq x \leq y,$$

και η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_2^*(x) = 0 \text{ ή } x, \; 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Τα αποτελέσματα για την

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \; a \in [0, x],$$

ισχύουν και χωρίς τις επιπλέον υποθέσεις για την $r(a)$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(a) + r(x-a) \leq r(x), \quad a \in [0, x].$$

- Πράγματι:

$$\begin{aligned} r(a) &= r\left(\left(1 - \frac{a}{x}\right) 0 + \frac{a}{x} x\right) \leq \left(1 - \frac{a}{x}\right) r(0) + \frac{a}{x} r(x), \\ r(x-a) &= r\left(\frac{a}{x} 0 + \left(1 - \frac{a}{x}\right) x\right) \leq \frac{a}{x} r(0) + \left(1 - \frac{a}{x}\right) r(x) \end{aligned}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$r(a) + r(x-a) \leq r(0) + r(x) \leq r(x).$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Βέλτιστη πολιτική για αύξουσα κυρτή συμμετρική περίπτωση

- Επαγωγικά, δείχνουμε ότι

$$v_n(x) = r(x), \quad 0 \le x \le y, \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

- Η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο n είναι η $a_n^*(x) = 0$ ή η $a_n^*(x) = x$.
- Άρα στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων με αύξουσα κυρτή $r(a)$ και $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση υπαγορεύει να επενδυθεί όλο το κεφάλαιο σε μια επιλογή.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Συμμετρική περίπτωση, αύξουσα κοίλη απόδοση

- Ειδική περίπτωση:
  $r_n(a) = r(a)$, $n = 1, 2, \ldots$
  $r(a) \geq 0$, αύξουσα κοίλη, $r(0) = 0$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq y \\
v_n(x) &= \max_{a \in [0,x]} [r(a) + v_{n-1}(x-a)], \\
&\qquad 0 \leq x \leq y, \quad n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = 0,\ 0 \leq x \leq y,$$

- Για $n = 1$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_1(x) = r(x),\ 0 \leq x \leq y,$$

και επομένως η βέλτιστη απόφαση είναι

$$a_1^*(x) = x,\ 0 \leq x \leq y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Για $n = 2$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση βελτιστοποίησης, έχουμε:

$$v_2(x) = \max_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)], \; 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \; a \in [0,x].$$

- Αν $r(x)$ παραγωγίσιμη και γνησίως κυρτή τότε $\frac{df(a)}{da} = r'(a) - r'(x-a)$.
- $\frac{df(a)}{da} = 0 \Rightarrow r'(a) = r'(x-a) \Rightarrow a = x - a \Rightarrow a = \frac{x}{2}$. $\frac{df(a)}{da} > 0$ για $a \in [0, \frac{x}{2})$, ενώ $\frac{df(a)}{da} < 0$ για $a \in (\frac{x}{2}, x]$.

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Οπότε για την
$$f(a) = r(a) + r(x-a),\ a \in [0, x],$$
έχουμε $f(a) \uparrow [0, \frac{x}{2})$ και $\downarrow (\frac{x}{2}, x]$.
- Άρα το μέγιστό της στο διάστημα $[0, x]$ βρίσκεται στο $a = \frac{x}{2}$.
- Επομένως
$$v_2(x) = 2r\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 \le x \le y,$$
και η βέλτιστη απόφαση είναι
$$a_2^*(x) = \frac{x}{2},\ 0 \le x \le y.$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής, $n = 2$

- Τα αποτελέσματα για την

$$f(a) = r(a) + r(x-a), \; a \in [0, x],$$

ισχύουν και χωρίς τις επιπλέον υποθέσεις για την $r(a)$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(a) + r(x-a) \le 2r\left(\frac{x}{2}\right), \quad a \in [0, x].$$

- Πράγματι:

$$\frac{1}{2}r(a) + \frac{1}{2}r(x-a) \le r\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(x-a)\right) = r\left(\frac{x}{2}\right),$$

οπότε

$$r(a) + r(x-a) \le 2r\left(\frac{x}{2}\right).$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Έχουμε δει ότι

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0,\; 0 \leq x \leq y, \\
v_1(x) &= r(x),\; 0 \leq x \leq y, \\
a_1^*(x) &= x,\; 0 \leq x \leq y, \\
v_2(x) &= 2r\left(\frac{x}{2}\right),\; 0 \leq x \leq y, \\
a_2^*(x) &= \frac{x}{2},\; 0 \leq x \leq y.
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα κατανομής πόρων - Βέλτιστη πολιτική για αύξουσα κοίλη συμμετρική περίπτωση

- Επαγωγικά, θα δείξουμε ότι

$$v_n(x) = nr\left(\frac{x}{n}\right), \ 0 \leq x \leq y, \ n = 1, 2, \ldots, N,$$

  με αντίστοιχη βέλτιστη απόφαση

$$a_n^*(x) = \frac{x}{n}, \ 0 \leq x \leq y, \ n = 1, 2, \ldots, N.$$

- Άρα στο συμμετρικό πρόβλημα κατανομής πόρων με αύξουσα κοίλη $r(a)$ και $r(0) = 0$, η βέλτιστη λύση υπαγορεύει να επενδυθεί ισόποσα το κεφάλαιο σε όλες τις επιλογές.

Απόδειξη

- Για $n = 1$, $v_1(x) = r(x)$ και $a_1^*(x) = x$, οπότε ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n-1$. Τότε:

$$v_n(x) = \max_{a \in [0,x]} \left(r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right)\right), \; 0 \leq x \leq y.$$

- Έστω

$$f(a) = r(a) + (n-1) r\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

Απόδειξη (συνέχεια)

- Για την

$$f(a) = r(a) + (n-1)r\left(\frac{x-a}{n-1}\right).$$

έχουμε

$$\frac{1}{n}r(a) + \frac{n-1}{n}r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \leq r\left(\frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}\frac{x-a}{n-1}\right) = r\left(\frac{x}{n}\right),$$

οπότε

$$r(a) + (n-1)r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \leq nr\left(\frac{x}{n}\right).$$

Απόδειξη (συνέχεια)

- Αρχίζοντας με κεφάλαιο $y_N = y$ για κατανομή σε N επιλογές, το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y}{N}$ στην επιλογή N.
- Μένει κεφάλαιο $y_{N-1} = \frac{(N-1)y}{N}$ για κατανομή σε $N-1$ επιλογές οπότε το βέλτιστο είναι να κατανεμηθεί $\frac{y_{N-1}}{N-1} = \frac{y}{N}$ στην επιλογή $N-1$ κ.ο.κ.
- Επομένως, όλο το αρχικά διαθέσιμο κεφάλαιο θα πρέπει να επενδυθεί ισόποσα στις επιλογές.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Περιγραφή

- Παίκτης στοιχηματίζει για N γύρους.
- Σε κάθε γύρο μπορεί να στοιχηματίσει οποιοδήποτε κλάσμα της περιουσίας του.
- p: πιθανότητα να κερδίσει.$q = 1 - p$.
- Σκοπός: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης τιμής κάποιας συνάρτησης της τελικής περιουσίας.
- Συνήθως, τέτοιου είδους συναρτήσεις υποτίθενται αύξουσες και κοίλες.
- Εδώ: Μεγιστοποίηση του λογαρίθμου.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: ο αριθμός N των συνολικών γύρων στοιχηματισμού.
- Στάδιο: Ο αριθμός n των υπόλοιπων γύρων στοιχημάτων.
- Κατάσταση: Η παρούσα περιουσία του παίκτη, x.
- Απόφαση: Το κλάσμα της περιουσίας, a, που θα στοιχηματίσει ο παίκτης.
- Δυναμική:

$$x \xrightarrow{a} \begin{cases} x - ax & \text{με πιθ. } q, \\ x + ax & \text{με πιθ. } p. \end{cases}$$

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v_n(x)$, ο μέγιστος αναμενόμενος λογάριθμος της τελικής περιουσίας του παίκτη, όταν αρχίζει με περιουσία x και μένουν n γύροι.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Η συνάρτηση βέλτιστης τιμής υπολογίζεται αναδρομικά από τις

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= \log x, \; x > 0, \\
v_n(x) &= \max_{a \in [0,1]} [p v_{n-1}(x(1+a)) + q v_{n-1}(x(1-a))], \\
&\quad x > 0, \; n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 0$

- Για $n = 0$, από την αρχική συνθήκη:

$$v_0(x) = \log x, \;\; x > 0,$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 1$

- Για $n = 1$, από την αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \max_{a\in[0,1]} \left[p\log(x(1+a)) + q\log(x(1-a))\right] \\ &= \max_{a\in[0,1]} \left[p\log x + p\log(1+a) + q\log x + q\log(1-a)\right] \\ &= \log x + \max_{a\in[0,1]} \left[p\log(1+a) + q\log(1-a)\right] \\ &= \log x + \max_{a\in[0,1]} f(a), \ \ x > 0, \end{aligned}$$

με

$$f(a) = p\log(1+a) + q\log(1-a).$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής $n = 1$ (συνέχεια)

- Πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την
$$f(a) = p\log(1+a) + q\log(1-a)$$
για $a \in [0,1)$.
- Έχουμε
$$\frac{df(a)}{da} = \frac{p}{1+a} - \frac{q}{1-a} = \frac{p-q-a}{1-a^2}.$$
- Είναι
$$\frac{df(a)}{a} = \begin{cases} + & a < p-q, \\ 0 & a = p-q, \\ - & a > p-q. \end{cases}$$
- Άρα το max της $f(a)$ πιάνεται στο $p-q$, αν $p \geq q$, και στο 0 διαφορετικά.

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Περίπτωση 1: $p < q \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$.
- Για $n = 1$:

$$a_1^*(x) = 0, \quad v_1(x) = \log x + f(0) = \log x, x > 0.$$

- Για $n = 2$, επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής:

$$a_2^*(x) = 0, \quad v_2(x) = \log x, x > 0.$$

- Επαγωγικά: Για $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_n^*(x) = 0, \quad v_n(x) = \log x, x > 0.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Υπολογισμός συνάρτησης βέλτιστης τιμής (συνέχεια)

- Περίπτωση 2: $p \geq q \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{2}$.
- Για $n = 1$:

$$a_1^*(x) = p-q, \quad v_1(x) = \log x + \underbrace{f(p-q)}_{c} = \log x + c, x > 0.$$

- Για $n = 2$, επανάληψη της ίδιας συλλογιστικής:

$$a_2^*(x) = p - q, \quad v_2(x) = \log x + 2c, x > 0.$$

- Επαγωγικά: Για $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_n^*(x) = p - q, \quad v_n(x) = \log x + nc, x > 0.$$

Μοντέλο στοιχηματικής πολιτικής - Βέλτιστη πολιτική

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} c &= f(p-q) = p\log(1+p-q) + q\log(1-p+q) \\ &= p\log(2p) + q\log(2q) \\ &= \log 2 + p\log p + q\log q. \end{aligned}$$

- $p \leq q$ (στοίχημα εις βάρος του παίκτη ή δίκαιο)$\rightarrow$ βέλτιστη πολιτική: να μην στοιχηματίζει σε κανέναν γύρο. $v_n(x) = \log x$.
- $p > q$ (ευνοϊκό στοίχημα)$\rightarrow$ βέλτιστη πολιτική: να στοιχηματίζει κλάσμα $p-q$ της περιουσίας του σε κάθε γύρο. $v_n(x) = \log x + nc$.
- Η βέλτιστη πολιτική είναι στάσιμη προσδιοριστική και μάλιστα η βέλτιστη απόφαση είναι η ίδια ανεξάρτητα κατάστασης.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Περιγραφή

- Μηχανή επιθεωρείται στην αρχή κάθε περιόδου.
- Χρονικός ορίζοντας: Πλήθος περιόδων N.
- Στάδιο: Χρόνος n που απομένει μέχρι τη λήξη της αναγκαιότητας χρήσης.
- Κατάσταση: Ηλικία x.
- Απόφαση: Συντήρηση (Σ) ή Αντικατάσταση (Α).
- Αντικατάσταση $\rightarrow$ την επόμενη μέρα καινούργιο (ηλικία 0) και θα αποφέρει κέρδος (αφαιρώντας το κόστος αντικατάστασης) λ.
- Συντήρηση $\rightarrow$ την επόμενη μέρα ηλικίας $x+1$ ή καινούργιο (ηλικία 0) και θα αποφέρει κέρδος $h(x)$ ή γ, με πιθανότητες $1-q_x$ και q_x .

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Περιγραφή

- Δυναμική:

$$\begin{aligned} x &\overset{\mathrm{A}}{\to} 0 \\ x &\overset{\Sigma}{\to} \begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } q_x, \\ x+1 & \text{με πιθ. } 1-q_x. \end{cases} \end{aligned}$$

- Άμεση αμοιβή:
  $r(x, \mathrm{A}) = \lambda$,
  $r(x, \Sigma) = q_x \gamma + (1 - q_x) h(x)$.
- Τερματικό κέρδος:
  $r(x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Παράμετροι και υποθέσεις

- k:
  Μέγιστη επιτρεπόμενη ηλικία μηχανήματος.
- $\gamma < \lambda < h(x)$:
  Κόστος επείγουσας αντικατάστασης μεγαλύτερο από το κόστος προληπτικής αντικατάστασης, που είναι μεγαλύτερο από το κόστος συντήρησης της μηχανής.
- $q_x \uparrow x$:
  Η πιθανότητα βλάβης αυξάνει με την ηλικία.
- $h(x) \downarrow x$: Το κόστος συντήρησης αυξάνει με την ηλικία.
- $r(x) \downarrow x$:
  Η αξία πώλησης στο τέλος του χρονικού ορίζοντα μειώνεται με την ηλικία.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη μέση συνολική αμοιβή για n περιόδους, $v_n(x)$, ξεκινώντας με μηχάνημα ηλικίας x.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= r(x), \\
v_n(x) &= \max[(1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1))+q_x v_{n-1}(0), \\
&\qquad \lambda + v_{n-1}(0)] \\
&= \lambda + v_{n-1}(0) \\
&+ \max[\underbrace{(1-q_x)(h(x)+v_{n-1}(x+1)-v_{n-1}(0))-\lambda}_{u_n(x)}, 0] \\
&= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0].
\end{aligned}
$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Εξισώσεις βελτιστοποίησης και εικασία

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= r(x), \\ v_n(x) &= \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0], \end{aligned}$$

με

$$u_n(x) = (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda.$$

- Εικασία:
  Για μεγάλα x, η Α προτιμότερη: $v_n(x) = \lambda + v_{n-1}(0)$.
  Για μικρά x, η Σ προτιμότερη: $v_n(x) > \lambda + v_{n-1}(0)$.
- Ικανή συνθήκη για απόδειξη εικασίας:
  $v_n(x) \downarrow x$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$

- Πρόταση: $v_n(x) \downarrow x$, για κάθε $n \geq 0$.
- Απόδειξη με επαγωγή στο n.
- Για $n = 0$, $v_0(x) = r(x) \downarrow x$.
- Έστω ότι η $v_{n-1}(x) \downarrow x$. Θα δείξουμε ότι και $v_n(x) \downarrow x$.
- Είναι
$$v_n(x) = \lambda + v_{n-1}(0) + \max[u_n(x), 0],$$
οπότε
$$v_n(x-1) - v_n(x) = \max[u_n(x-1), 0] - \max[u_n(x), 0].$$

- Θα διακρίνουμε 4 περιπτώσεις, ανάλογα με τα πρόσημα των $u_n(x-1)$ και $u_n(x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 1

- $u_n(x) \geq 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Έχουμε $(h(x) \downarrow x,\ v_{n-1}(x) \downarrow x)$:

$$
\begin{aligned}
& v_n(x-1) - v_n(x) \\
= \ & u_n(x-1) - u_n(x) \\
= \ & (1-q_{x-1})(h(x-1) + v_{n-1}(x) - v_{n-1}(0)) \\
& -(1-q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
\geq \ & (1-q_{x-1})(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
& -(1-q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
= \ & (q_x - q_{x-1})(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) \\
= \ & \underbrace{(q_x - q_{x-1})}_{\geq 0} \frac{\lambda + u_n(x)}{1-q_x} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 2

- $u_n(x) \geq 0$ και $u_n(x-1) < 0$.
- Η περίπτωση αυτή δεν μπορεί να ισχύει αφού η $u_n(x)$ είναι φθίνουσα:

$$u_n(x) = (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x+1) - v_{n-1}(0)) - \lambda$$

$(1 - q_x,\ h(x)$ και $v_{n-1}(x)$ είναι $\downarrow x)$.

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 3

- $u_n(x) < 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$v_n(x-1) - v_n(x) = u_n(x-1) \geq 0.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Μονοτονία $v_n(x)$ - Περίπτωση 4

- $u_n(x) < 0$ και $u_n(x-1) \geq 0$.
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$v_n(x-1) - v_n(x) \quad = \quad 0.$$

Μοντέλο συντήρησης-αντικατάστασης - Βέλτιστη πολιτική

- Για κάθε στάδιο n, υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός (κατώφλι) c_n, τέτοιος ώστε η βέλτιστη πολιτική να υπαγορεύει να συντηρείται η μηχανή όταν $x \in \{0, 1, 2, \ldots, c_n\}$ και να αντικαθίσταται αν $x \in \{c_n + 1, c_n + 2, \ldots, k\}$.
- Ο αριθμός αυτός δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} c_n &= \max\{x : u_n(x) \geq 0\}. \\ &= \max\{x : (1 - q_x)(h(x) + v_{n-1}(x + 1) - v_{n-1}(0)) \geq \lambda\}. \end{aligned}$$

Επιχείρημα ανταλλαγής

- Επιχείρημα της ανταλλαγής $\rightarrow$ Απλοποίηση λύσεων δυναμικού προγραμματισμού όπου υπάρχει ένα συγκεκριμένο σύνολο αποφάσεων που πρέπει να ληφθούν και το ερώτημα είναι η βέλτιστη διάταξή τους.
- Χρονικός ορίζοντας: Αριθμός αποφάσεων N που θα ληφθούν συνολικά.
- Στάδιο: Αριθμός αποφάσεων n που μένει να ληφθούν.
- Κατάσταση: Σύνολο διαθέσιμων αποφάσεων $\mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ με $|\mathcal{S}| = n$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Περιγραφή

- N εργασίες προς διεκπεραίωση.
- $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots x_N$, οι χρόνοι επεξεργασίας των εργασιών.
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μοντελοποίηση ως π.μ-γ.π.

- Σειρά διεκπεραίωσης $i_1, i_2, \ldots, i_N$ → Συνολικός χρόνος αναμονής

$$Nx_{i_1} + (N-1)x_{i_2} + \cdots + 2x_{i_{N-1}} + x_{i_N}.$$

- Πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\min_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)} \sum_{k=1}^{N} (N-k+1)x_{i_k},$$

όπου η εφικτή περιοχή περιέχει όλες τις δυνατές μεταθέσεις του συνόλου $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μοντελοποίηση ως π.δ.π.

- Χρονικός ορίζοντας: Ο αριθμός όλων των εργασιών, προς διεκπεραίωση, N.
- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathcal{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.
- Απόφαση: Η εργασία, i, που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το ελάχιστο άθροισμα των χρόνων παραμονής των εργασιών, $v_n(\mathcal{S})$, του $\mathcal{S}$, που απομένουν προς διεκπεραίωση.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- $v_n(\mathcal{S})$: η ελάχιστη συνολική αναμόνή για τις n εργασίες του $\mathcal{S}$.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(\emptyset) &= 0, \\
v_n(\mathcal{S}) &= \min_{i \in \mathcal{S}} [n x_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\})], \\
&\quad \mathcal{S} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\},\ |\mathcal{S}| = n,\ n = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Υπολογισμός $v_n(\mathcal{S})$, $n = 0, 1, 2$

- Για $n = 0, 1, 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} v_0(\emptyset) &= 0, \\ v_1(\{i\}) &= x_i + v_0(\emptyset) = x_i, \ \{i\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}, \\ v_2(\{i,j\}) &= \min[2x_i + v_1(\{j\}), 2x_j + v_1(\{i\})] \\ &= \min[2x_i + x_j, 2x_j + x_i] \\ &= x_i + x_j + \min[x_i, x_j] = 2x_i + x_j, \\ &\quad \text{αν } x_i \leq x_j, \ \{i,j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

- Χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη των x_i και x_j για να προσδιορίσουμε την $v_2(\{i,j\})$.
- Είναι φανερό ότι αυτό θα χρειάζεται και παρακάτω.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Υπολογισμός $v_n(\mathcal{S})$, $n = 3$

- Για $n = 3$, για τον υπολογισμό της $v_3(\{i, j, k\})$ θα πρέπει να γνωρίζουμε τη διάταξη των x_i, x_j και x_k
- Υποθέτουμε μια τέτοια διάταξη, έστω $x_i \leq x_j \leq x_k$.
- Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
& v_3(\{i, j, k\}) \\
= \; & \min[3x_i + v_2(\{j, k\}), 3x_j + v_2(\{i, k\}), 3x_k + v_2(\{i, j\})] \\
= \; & \min[3x_i + 2x_j + x_k, 3x_j + 2x_i + x_k, 3x_k + 2x_i + x_j] \\
= \; & 3x_i + 2x_j + x_k, \\
& \text{αν } x_i \leq x_j \leq x_k, \; \{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}.
\end{aligned}$$

- Βέλτιστη σειρά εκτέλεσης των εργασιών → Διάταξη τους κατά αύξουσα σειρά των χρόνων εκτέλεσής τους.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$\begin{aligned}
&v_n(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) \\
&\quad = n x_{i_1} + (n-1)x_{i_2} + (n-2)x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \\
&\quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\
&\quad \text{με } x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \ldots x_{i_n}.
\end{aligned}$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$\begin{aligned}
&a_n^*(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) = i_1, \\
&\quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\
&\quad \text{με } x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3} \leq \ldots x_{i_n}.
\end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n.
- Για $n = 0, 1$ έχει ήδη αποδειχθεί.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
& v_n(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) \\
= \; & \min[n x_{i_1} + v_{n-1}(\{i_2, i_3, \ldots, i_n\}), \\
& \qquad n x_{i_2} + v_{n-1}(\{i_1, i_3, \ldots, i_n\}), \ldots \\
& \qquad n x_{i_n} + v_{n-1}(\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}] \\
= \; & \min[n x_{i_1} + (n-1) x_{i_2} + (n-2) x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \\
& \qquad n x_{i_2} + (n-1) x_{i_1} + (n-2) x_{i_3} + \cdots + x_{i_n}, \ldots \\
& \qquad n x_{i_n} + (n-1) x_{i_1} + (n-2) x_{i_2} + \cdots + x_{i_{n-1}}].
\end{aligned}
$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συν)

- Ποσότητα που αντιστοιχει στην επιλογή της εργασίας i_k για επόμενη διεκπεραίωση:

$$
\begin{aligned}
& nx_{i_k} + (n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \cdots + (n-k+1)x_{i_{k-1}} \\
& \quad +(n-k)x_{i_{k+1}} + \cdots + x_{i_n} \\
= \quad & nx_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-1}(n-j)x_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{n}(n-j+1)x_{i_j} \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} x_{i_j}.
\end{aligned}
$$

- Αρκεί να δείξουμε ότι το ελάχιστο της παράστασης αυτής επιτυγχάνεται για $k=1$.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συν)

- Αν πάρουμε τη διαφορά της παράστασης για ένα τυχόν k και για $k = 1$ έχουμε:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + kx_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{n} x_{i_j}}_{\text{για τυχόν } k}$$

$$-\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}(n-j)x_{i_j} + x_{i_1} + \sum_{j=2}^{n} x_{i_j}\right)}_{\text{για } k=1}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(x_{i_k} - x_{i_j}) \geq 0.$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής

- Επιχείρημα ανταλλαγής:
  Εφαρμόσιμο όταν το ζητούμενο δεν είναι το ποιες αποφάσεις να πάρουμε, αλλά υπάρχει ένα σύνολο αποφάσεων που πρέπει να διατάξουμε βέλτιστα.
- Ιδέα:
  Όντας σε μια κατάσταση, συγκρίνουμε για οποιεσδήποτε δυο διαθέσιμες αποφάσεις a και a' τα συνολικά κόστη αν χρησιμοποιήσουμε για τα επόμενα δύο στάδια πρώτα την a και μετά την a' ή πρώτα την a' και μετά την a, και μετά συνεχίσουμε βέλτιστα.

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Εφαρμόζω την εξίσωση βελτιστοποίησης για δυο στάδια:

$$\begin{aligned} v_n(\mathcal{S}) &= \min_{i\in\mathcal{S}}[nx_i + v_{n-1}(\mathcal{S}\setminus\{i\})] \\ &= \min_{i\in\mathcal{S}} \min_{j\in\mathcal{S}\setminus\{i\}}[nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathcal{S}\setminus\{i,j\})]. \end{aligned}$$

Ελαχιστοποίηση συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών - Επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Για δοθέντα $i, j \in \mathcal{S}$, το συνολικό κόστος αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι
$$nx_i + (n-1)x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$
ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι
$$nx_j + (n-1)x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$
με διαφορά $x_i - x_j$.
- Επομένως, είναι προτιμώτερο να πάρουμε πρώτα την απόφαση i αν $x_i - x_j \leq 0$, δηλαδή αν $x_i \leq x_j$.
- Άρα, σε μια κατάσταση $\mathcal{S}$, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathcal{S}$ είναι καλύτερο να διαλέξουμε την εργασία με τον μικρότερο χρόνο διεκπεραίωσης.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Περιγραφή

- Μηχανή πρόκειται να επεξεργαστεί ακολουθιακά N εργασίες, $1, 2, \ldots, N$.
- Πιθανότητα επιτυχούς περαίωσης εργασίας i: p_i.
- Αμοιβή επιτυχούς διεκπεραίωσης εργασίας i: x_i.
- Βλάβη κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας μιας εργασίας $\rightarrow$ όχι αμοιβή, όχι διεκπεραίωση υπόλοιπων.
- Στόχος: Προγραμματισμός σειράς εκτέλεσης των εργασιών που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική αμοιβή μέχρι την εμφάνιση βλάβης.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Μοντελοποίηση

- Στάδιο: Ο αριθμός των εργασιών, n, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Κατάσταση: Το σύνολο των εργασιών, $\mathcal{S}$, που απομένουν προς επεξεργασία.
- Απόφαση: Η εργασία, i, που θα διεκπεραιωθεί άμεσα.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο άθροισμα αμοιβών, $v_n(\mathcal{S})$, από τις εργασίες του $\mathcal{S}$, μέχρι την εμφάνιση βλάβης, δεδομένου ότι αυτή δεν έχει συμβεί ακόμη.
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(\emptyset) &= 0, \\
v_n(\mathcal{S}) &= \max_{i \in \mathcal{S}}[p_i(x_i + v_{n-1}(\mathcal{S} \setminus \{i\}))], \ |\mathcal{S}| = n, \ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής

- Χρησιμοποιώντας δυο φορές την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$v_n(\mathcal{S}) \quad = \quad \max_{i \in \mathcal{S}} \max_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} [p_i(x_i + p_j(x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\})))].$$

- Για δοθέντα $i, j \in \mathcal{S}$, η αναμενόμενη συνολική αμοιβή αν διαλέξουμε πρώτα την i και μετά τη j είναι

$$p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}),$$

ενώ αν διαλέξουμε πρώτα την j και μετά την i είναι

$$p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i, j\}).$$

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής (συνέχεια)

- Πρώτα την i και μετά την j είναι προτιμώτερο $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & p_i x_i + p_i p_j x_j + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\}) \\ & \qquad \geq p_j x_j + p_j p_i x_i + v_{n-2}(\mathcal{S} \setminus \{i,j\}) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{p_i x_i}{1-p_i} \geq \frac{p_j x_j}{1-p_j}. \end{aligned}$$

- Επομένως, από δυο οποιεσδήποτε αποφάσεις $i, j \in \mathcal{S}$ είναι καλύτερο να διεκπεραιώσουμε την εργασία i που έχει το μεγαλύτερο λόγο $\frac{p_i x_i}{1-p_i}$.

Μεγιστοποίηση απόδοσης μέχρι μια βλάβη - Βέλτιστη πολιτική

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$\begin{aligned} & v_n(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) \\ = \ & p_{i_1} x_{i_1} + p_{i_1} p_{i_2} x_{i_2} + p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} x_{i_3} + \cdots + p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n} x_{i_n}, \\ & \quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\ & \quad \text{με } \frac{p_{i_1} x_{i_1}}{1 - p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2} x_{i_2}}{1 - p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3} x_{i_3}}{1 - p_{i_3}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_n} x_{i_n}}{1 - p_{i_n}}. \end{aligned}$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$\begin{aligned} & a_n^*(\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}) = i_1, \\ & \quad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N\} \\ & \quad \text{με } \frac{p_{i_1} x_{i_1}}{1 - p_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2} x_{i_2}}{1 - p_{i_2}} \geq \frac{p_{i_3} x_{i_3}}{1 - p_{i_3}} \geq \cdots \geq \frac{p_{i_n} x_{i_n}}{1 - p_{i_n}}. \end{aligned}$$

Προβλήματα βέλτιστης διακοπής

- Στα προβλήματα αυτά υπάρχει μια διαδικασία σε εξέλιξη και σε κάθε στάδιο υπάρχουν δύο αποφάσεις:
  1. Συνέχιση της διαδικασίας.
  2. Διακοπή της διαδικασίας.
- Το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της συνολικής αμοιβής από την εξέλιξη της διαδικασίας.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Περιγραφή

- Είναι γνωστό και ως μοντέλο Cayley-Moser.
- Ένα περιουσιακό στοιχείο προς πώληση.
- N περίοδοι-ευκαιρίες πώλησης.
- Σε κάθε περίοδο έρχεται μία προσφορά.
- Τιμές προσφοράς στις διάφορες περιόδους ανεξ. ισον. με σ.κ. $F(y)$, με αναμενόμενη τιμή μ.
- Σε κάθε περίοδο γίνεται γνωστή η τρέχουσα προσφορά και κατόπιν αποφασίζεται αν θα γίνει πώληση ή όχι.
- Προηγούμενες προσφορές είναι μη-ανακλήσιμες.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση αναμενόμενης τιμής πώλησης.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: Ο αριθμός των περιόδων/ευκαιριών, N.
- Στάδιο: Ο αριθμός των προσφορών, n, που απομένουν μέχρι το τέλος του χρονικού ορίζοντα.
- Κατάσταση: Η τρέχουσα προσφορά, x.
- Απόφαση : Η αποδοχή ή η απόρριψη της προσφοράς.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη αναμενόμενη απόδοση, $v_n(x)$, αν η τρέχουσα προσφορά είναι x και απομένουν n προσφορές (συμπεριλαμβανομένης της τρέχουσας).

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= 0,\ x \geq 0, \\
v_n(x) &= \max\left[x, \int_0^{\infty} v_{n-1}(y)dF(y)\right],\ x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 0, 1$

- Για $n = 0$, αρχική συνθήκη $\Rightarrow$

$$v_0(x) = 0, \; x \geq 0,$$

- Για $n = 1$, εξίσωση βελτιστοποίησης $\Rightarrow$

$$v_1(x) = \max[x, 0] = x, \; x \geq 0.$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n=2$

- Για $n=2$ έχουμε

$$v_2(x) = \max\left[x, \underbrace{\int_0^\infty y dF(y)}_{E[v_1(Y)]=a_2}\right], \; x \geq 0.$$

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} a_2 &= \int_0^\infty y dF(y) = \mu, \\ v_2(x) &= \begin{cases} a_2, & \text{αν } x \leq a_2, \\ x, & \text{αν } x \geq a_2, \end{cases} \\ a_2^*(x) &= \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_2, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Υπολογισμός $v_n(x)$ για $n = 3$

- Για $n = 3$ έχουμε

$$v_3(x) = \max\left[x, \underbrace{\int_0^\infty v_2(y)dF(y)}_{a_3}\right], \; x \geq 0.$$

- Έχουμε:

$$a_3 = E[v_2(Y)] = \int_0^{a_2} a_2 dF(y) + \int_{a_2}^\infty y dF(y),$$

$$v_3(x) = \begin{cases} a_3, & \text{αν } x \leq a_3, \\ x, & \text{αν } x \geq a_3, \end{cases}$$

$$a_3^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_3, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_3. \end{cases}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Έστω η ακολουθία

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_n &= \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} y dF(y), \ n = 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής:

$$v_n(x) = \max[x, a_n], \ x \geq 0.$$

- Βέλτιστη απόφαση:

$$a_n^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς}, & \text{αν } x \leq a_n, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς}, & \text{αν } x \geq a_n. \end{cases}$$

- Η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα.

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Επαγωγή στο n. Για $n = 0, 1$ έχει δειχθεί.
- Αν ισχύει για $n-1$, τότε

$$v_n(x) = \max\left[x, \underbrace{\int_0^\infty v_{n-1}(y)dF(y)}_{a_n}\right], \; x \geq 0.$$

$$a_n = E[v_{n-1}(Y)] = \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1}dF(y) + \int_{a_{n-1}}^\infty ydF(y),$$

$$v_n(x) = \begin{cases} a_n, & \text{αν } x \leq a_n, \\ x, & \text{αν } x \geq a_n, \end{cases}$$

$$a_n^*(x) = \begin{cases} \text{απόρριψη της προσφοράς,} & \text{αν } x \leq a_n, \\ \text{αποδοχή της προσφοράς,} & \text{αν } x \geq a_n. \end{cases}$$

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής (συνέχεια)

- Για τη μονοτονία της a_n έχουμε:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} y dF(y) \\ &\geq \int_0^{a_{n-1}} a_{n-1} dF(y) + \int_{a_{n-1}}^{\infty} a_{n-1} dF(y) = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Προβλήμα πώλησης περιουσιακού στοιχείου - Γενικεύσεις

- Πολλά περιουσιακά στοιχεία.
- Παραπάνω από μια ευκαιρία (μερική ανάκληση προσφορών).
- Διαφορετικές κατανομές των προσφορών για διαφορετικές περιόδους.
- Μαρκοβιανή εξάρτηση των προσφορών.