Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Περιγραφή

- Κάτοχος δικαιώματος αγοράς 1 μετοχής σε τιμή c εντός N περιόδων.
- X_n: τιμή της μετοχής όταν απομένουν n περίοδοι.
- Μοντέλο διακύμανσης τιμής μετοχής → Τυχαίος περίπατος:

$$X_n = X_{n+1} + Y_n, \quad Y_n \sim F(y) \text{ ανεξ..}$$

- Αφού γίνει γνωστή η τρέχουσα τιμή της μετοχής, παίρνεται η απόφαση για το αν το δικαίωμα αγοράς θα ασκηθεί ή όχι.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση αναμενόμενου κέρδους (τιμή μετοχής πλην c).

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Μοντελοποίηση

- Χρονικός ορίζοντας: Ο συνολικός αριθμός ημερών, N, για την άσκηση του δικαιώματος.
- Στάδιο: Ο αριθμός των ημερών, n, που απομένουν για να εξασκηθεί το δικαίωμα.
- Κατάσταση: Η τρέχουσα τιμή της μετοχής, x, στην αρχή μιας ημέρας.
- Απόφαση: Η άσκηση ή όχι του δικαιώματος.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος, $v_n(x)$, όταν η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι x και το δικαίωμα εκπνέει σε n ημέρες.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εξισώσεις βελτιστοποίησης

- Εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= \max[x-c,0], \\
v_n(x) &= \max\left[x-c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y)dF(y)\right], \; n=1,2,\ldots.
\end{aligned}
$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης

- Εικασία 1: $v_n(x) \uparrow n$ (με επαγωγή).
  Περισσότερες μέρες για την άσκηση του δικαιώματος $\rightarrow$ Μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος.
- Εικασία 2: $v_n(x) \uparrow x$ (με επαγωγή).
  Μεγαλύτερη τρέχουσα τιμή μετοχής $\rightarrow$ Μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης (συνέχεια)

- Εικασία 3: Για κάθε στάδιο n υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός x_n^* τέτοιος ώστε για $x < x_n^*$ να είναι προτιμότερο να μην ασκήσουμε το δικαίωμα, ενώ για $x \geq x_n^*$ να είναι προτιμότερο να ασκήσουμε το δικαίωμα.

  Καθώς είναι βέλτιστο
  να ασκήσουμε το δικαίωμα αν $v_n(x) = x - c$ και
  να μην το ασκήσουμε όταν $v_n(x) > x - c$,
  πρέπει να δείξουμε ότι

$$v_n(x) - x = \begin{cases} > -c & \text{αν } x < x_n^*, \\ = -c & \text{αν } x \geq x_n^*. \end{cases}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Εικασίες, σχέδιο λύσης (συνέχεια)

- Εικασία 3′: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $v_n(x) - x \downarrow x$ (με επαγωγή).
  Μεγαλύτερη τιμή $x \rightarrow$ Μικρότερη διαφορά απόδοσης μεταξύ βέλτιστης άσκησης του δικαιώματος και άμεσης άσκησης του δικαιώματος.
- Εικασία 4: $x_n^* \uparrow n$ (με επαγωγή).
  Περισσότερες μέρες για την άσκηση του δικαιώματος $\rightarrow$ Μεγαλύτερη προθυμία για αναμονή στην άσκηση του δικαιώματος.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 1

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) \uparrow n$ για κάθε σταθερό x.
- Για $n = 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} \max(x + y - c, 0)dF(y)\right] \\ &\geq \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} 0dF(y)\right] = v_0(x). \end{aligned}$$

- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$, δηλ.
$v_{n-1}(x) \geq v_{n-2}(x)$, για κάθε x. Τότε:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x + y)dF(y)\right] \\ &\geq \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-2}(x + y)dF(y)\right] = v_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 2

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) \uparrow x$ για κάθε σταθερό n.
- Για $n = 0$ ισχύει: $v_0(x) = \max[x - c, 0] \uparrow x$.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$: $v_{n-1}(x) \uparrow x$.Τότε:

$$
\begin{aligned}
& x \leq x' \Rightarrow \begin{cases} x - c \leq x' - c, \\ v_{n-1}(x+y) \leq v_{n-1}(x'+y), y \in \mathbb{R} \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y) dF(y) \leq \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x'+y) dF(y) \\
\Rightarrow \quad & v_n(x) = \max\left[x - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y) dF(y), 0\right] \\
& \leq \max\left[x' - c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x'+y) dF(y)\right] = v_n(x').
\end{aligned}
$$

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 3

- Θα δείξουμε ότι $v_n(x) - x \downarrow x$, για κάθε n.
- Για $n = 0$ ισχύει: $v_0(x) - x = \max[-c, -x] \downarrow x$.
- Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε:

$$\begin{aligned} v_n(x) - x &= \max\left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} v_{n-1}(x+y)dF(y) - x\right] \\ &= \max\left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} (v_{n-1}(x+y) - (x+y))dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} ydF(y)\right] \\ &= \max\left[-c, \int_{-\infty}^{\infty} (v_{n-1}(x+y) - (x+y))dF(y) + E[Y]\right]. \end{aligned}$$

- $v_{n-1}(x+y) - (x+y) \downarrow x$ για κάθε $y \Rightarrow v_n(x) - x \downarrow x$.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη βέλτιστης πολιτικής

- Θα δείξουμε ότι η βέλτιστη πολιτική υπαγορεύει την άσκηση του δικαιώματος στο στάδιο n εφόσον η τιμή x στο στάδιο n είναι $\geq$ από κατώφλι x_n^*.
- Έστω n. Αφού η συνάρτηση $v_n(x) - x$ είναι φθίνουσα, υπάρχουν δυο περιπτώσεις:
  1. Αν $v_n(x) - x > -c$ για κάθε x, τότε είναι βέλτιστο πάντα να μην ασκηθεί το δικαίωμα και επομένως $x_n^* = \infty$.
  2. Στην άλλη περίπτωση υπάρχει κάποιο $x < \infty$ ώστε $v_n(x) - x \leq c$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $x_n^* = \inf\{x : v_n(x) - x \leq -c\} < \infty$.
- $v_n(x) - x \downarrow x$, ορισμός $x_n^* \Rightarrow$ $(x \geq x_n^* \Leftrightarrow v_n(x) - x \leq -c)$ και επομένως είναι βέλτιστο να ασκηθεί το δικαίωμα ανν $x \geq x_n^*$.

Εξάσκηση δικαιώματος αγοράς μετοχής - Απόδειξη εικασίας 4

- Θα δείξουμε ότι $x_n^* \uparrow n$.
- Έχουμε:

$$v_n(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \leq v_{n+1}(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \leq -c.$$

- Η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας της $v_n(x)$ ως προς n.
- Η δεύτερη ισχύει από τον ορισμό του x_{n+1}^*.
- Τότε, λόγω της μονοτονίας της $v_n(x) - x$ ως προς x έχουμε $v_n(x) - x \leq -c$ για κάθε $x \geq x_{n+1}^*$.
- Άρα:

$$x_n^* = \inf\{x : v_n(x) - x \leq -c\} \leq x_{n+1}^*.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Περιγραφή

- Ένας διευθυντής εξετάζει το πολύ N υποψηφίους για την επιλογή ενός για θέση γραμματέως.
- Το N είναι προαποφασισμένο.
- Οι υποψήφιοι μπορούν να διαταχθούν από τον καλύτερο (1ης τάξης) ως τον χειρότερο (Nης τάξης). Δεν υπάρχουν ισοδύναμοι.
- Η σειρά εξέτασης των υποψηφίων είναι τυχαία.
- Μετά τη συνέντευξη ενός υποψηφίου, ο διευθυντής γνωρίζει τη σχετική διάταξή του σε σχέση με όλους τους προηγούμενους.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Περιγραφή (συνέχεια)

- Μετά τη συνέντευξη, ο διευθυντής αποφασίζει αν θα προσλάβει τον υποψήφιο ($a = 1$) ή όχι ($a = 0$).
- Αν προσληφθεί ένας υποψήφιος η διαδικασία συνεντεύξεων σταματά.
- Η απόφαση της πρόσληψης ή της απόρριψης δεν είναι δυνατόν να ανακληθεί αργότερα.
- Στόχος του διευθυντή είναι να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα πρόσληψης στη θέση του καλύτερου υποψηφίου από τους N.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Μοντελοποίηση

- Στάδιο: Ο αριθμός των υπόλοιπων υποψηφίων, n, που ειναι διαθέσιμοι για συνέντευξη, εξαιρουμένου του υποψηφίου που μόλις έχει εξεταστεί (του $(N-n)$-οστού υποψηφίου).
- Κατάσταση: Δίτιμη μεταβλητή x, που να παίρνει τις τιμές 1 (αν ο τελευταίος υποψήφιος ήταν ο καλύτερος μέχρι στιγμής) ή 0 (αν δεν ήταν).
- Απόφαση: Να προσλάβει ή να απορρίψει τον τελευταίο υποψήφιο. Βεβαίως, αν $x=0$, ο υποψήφιος πρέπει να απορριφθεί.
- Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: Η μέγιστη πιθανότητα, $v_n(x)$, να επιλεγεί ο καλύτερος από όλους τους υποψηφίους, δεδομένου ότι η κατάσταση είναι x και απομένουν n ακόμη υποψήφιοι.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_0(x)$

- Αν ο τελευταίος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τώρα υποψηφίους, τότε ο διευθυντής προσλαμβάνοντάς τον έχει επιλέξει τον καλύτερο υποψήφιο (με πιθανότητα 1).
- Αν όχι, τότε του απομένει να επιλέξει αυτόν τον υποψήφιο που σίγουρα δεν είναι ο καλύτερος:

$$v_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(x)$, $n \geq 1$, χρήσιμες ποσότητες

- Η πιθανότητα στο στάδιο n η κατάσταση να είναι 1 είναι
$$\frac{1}{N-n},$$
δηλαδή ο τρέχων υποψήφιος να είναι ο καλύτερος από τους $N-n$ που έχουν εξεταστεί.
- Η πιθανότητα στο στάδιο n, ο υποψήφιος να είναι ο καλύτερος όλων των N υποψηφίων δεδομένου ότι είναι ο καλύτερος από τους $N-n$ που έχουν εξεταστεί είναι

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{ο } (N-n)\text{-οστός υποψήφιος είναι ο καλύτερος όλων} \\ & \qquad |\text{είναι ο καλύτερος μεταξύ των πρώτων } N-n] \\ = \; & \frac{1/N}{1/(N-n)} = \frac{N-n}{N}. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(0)$, $n \geq 1$

- Έστω ότι είμαστε στο στάδιο n.
- Αν $x = 0$, και επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος τότε η πιθανότητα να επιτύχει ο διευθυντής τον στόχο του είναι 0.
- Αν $x = 0$, και δεν επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η επόμενη κατάσταση στο στάδιο $n - 1$ είναι η 1, αν ο επόμενος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τότε $N - (n - 1)$ υποψηφίους.Άρα:

$$
\begin{aligned}
v_n(0) &= \max\left[0, \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0)\right] \\
&= \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0).
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής $v_n(1)$, $n \geq 1$

- Έστω ότι είμαστε στο στάδιο n.
- Αν $x = 1$, και επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η πιθανότητα να επιτύχει ο διευθυντής τον στόχο του είναι η πιθανότητα ο τρέχων υποψήφιος να είναι ο καλύτερος όλων, δηλαδή $\frac{N-n}{N}$.
- Αν $x = 1$, και δεν επιλεγεί ο τρέχων υποψήφιος, τότε η επόμενη κατάσταση στο στάδιο $n-1$ είναι η 1, αν ο επόμενος υποψήφιος είναι ο καλύτερος από τους μέχρι τότε $N-(n-1)$ υποψηφίους. Άρα:

$$\begin{aligned} v_n(1) &= \max\left[\frac{N-n}{N}, \frac{1}{N-n+1}v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1}v_{n-1}(\right. \\ &= \max\left[\frac{N-n}{N}, v_n(0)\right]. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Συνάρτηση βέλτιστης τιμής - σύνοψη

- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_0(x) &= \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases} \\
v_n(0) &= \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0), \\
& \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
v_n(1) &= \max\left[\frac{N-n}{N}, v_n(0)\right], \ n = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Ιδιότητες συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Ιδιότητα 1: Η κατάσταση 1 είναι προτιμώτερη της 0 για όλα τα στάδια, δηλαδή,

$$v_n(1) \geq v_n(0), \ n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

- Ιδιότητα 2: Η $v_n(0)$ είναι αύξουσα ως προς n, δηλαδή,

$$v_{n-1}(0) \leq v_n(0), \ n = 1, 2, \ldots, N.$$

- Ιδιότητα 3: Ισχύει ότι

$$v_n(0) = (N-n) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(N-j-1)(N-j)} v_j(1), \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 1 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η σχέση $v_n(1) \geq v_n(0)$ είναι άμεση αφού:

$$v_n(1) = \max\left[\frac{N-n}{N}, v_n(0)\right] \geq v_n(0).$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 2 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Η σχέση $v_{n-1}(0) \leq v_n(0)$ συνάγεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση βελτιστοποίησης σε συνδυασμό με την ιδιότητα 1:

$$\begin{aligned} v_n(0) &= \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0) \\ &\geq \frac{1}{N-n+1} v_{n-1}(0) + \frac{N-n}{N-n+1} v_{n-1}(0) \\ &= v_{n-1}(0). \end{aligned}$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη ιδιότητας 3 συνάρτησης βέλτιστης τιμής

- Για την ιδιότητα 3 χρησιμοποιούμε αναδρομικά την εξίσωση βελτιστοποίησης:

$$
\begin{aligned}
v_n(0) &= \frac{1}{N-(n-1)} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-(n-1)} v_{n-1}(0) \\
&= \frac{1}{N-(n-1)} v_{n-1}(1) + \frac{N-n}{N-(n-1)} \cdot \frac{1}{N-(n-2)} v_{n-2}(1) \\
&\quad + \frac{N-n}{N-(n-1)} \cdot \frac{N-(n-1)}{N-(n-2)} v_{n-2}(0) \\
&= \cdots \\
&= \frac{N-n}{(N-n)(N-(n-1))} v_{n-1}(1) \\
&\quad + \frac{N-n}{(N-(n-1))(N-(n-2))} v_{n-2}(1) \\
&\quad + \frac{N-n}{(N-(n-2))(N-(n-3))} v_{n-3}(1) + \cdots + \frac{N-n}{(N-1)N} v_0(1).
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Μορφή βέλτιστης πολιτικής

- Έστω n^* τέτοιο ώστε

$$n^* = \max\left\{n = 1, 2, \ldots, t-1 : \frac{\cancel{t}N - n}{\cancel{t}N} \geq v_n(0)\right\}.$$

- Η βέλτιστη πολιτική έχει τη μορφή

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0, \\ 0, & \text{αν } x = 1 \text{ και } n > n^*, \\ 1, & \text{αν } x = 1 \text{ και } n \leq n^*, \end{cases}$$

δηλαδή απορρίπτει τους υποψηφίους μέχρι να απομείνουν n^* υποψήφιοι και κατόπιν επιλέγεται ο πρώτος που είναι καλύτερος μεταξύ αυτών που έχουν ήδη περάσει.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Απόδειξη μορφής βέλτιστης πολιτικής

- Έχουμε

$$v_n(1) = \max\left[\underbrace{\frac{N-n}{N}}_{\downarrow n}, \underbrace{v_n(0)}_{\uparrow n}\right].$$

- $\frac{N-n}{N} \downarrow n$ και $v_n(0) \uparrow n \Rightarrow$
Υπάρχει n^* τέτοιο ώστε $\frac{N-n}{N} \geq v_n(0)$ για $n \leq n^*$,
$\frac{N-n}{N} < v_n(0)$ για $n > n^*$.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Για να βρούμε το n^*, πρέπει να υπολογίζουμε το $v_n(0)$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ και σε κάθε βήμα να συγκρίνουμε το $\frac{N-n}{N}$ με το $v_n(0)$, μέχρι βρούμε ένα n^* ώστε

$$\frac{N - n^*}{N} \geq v_{n^*}(0) \text{ αλλά}$$

$$\frac{N - (n^* + 1)}{N} < v_{n^*+1}(0).$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Για τον υπολογισμό του $v_n(0)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$v_n(0) = \frac{N-n}{N}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{N-j-1},\ n \le n^*+1.$$

- Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 3 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για $n \le n^*+1$ και $j = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι $v_j(1) = \frac{N-j}{N}$, οπότε

$$v_n(0) = (N-n)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(N-j-1)(N-j)}\underbrace{v_j(1)}_{\frac{N-j}{N}}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Από τον τύπο που μόλις αποδείχθηκε έχουμε

$$
\begin{aligned}
v_{n^*}(0) &= \frac{N-n^*}{N}\sum_{j=0}^{n^*-1}\frac{1}{N-j-1},\\
v_{n^*+1}(0) &= \frac{N-n^*-1}{t}\sum_{j=0}^{n^*}\frac{1}{N-j-1}.
\end{aligned}
$$

- Το κατώφλι n^* χαρακτηρίζεται από τις ανισότητες $\frac{N-n^*}{N} \geq v_{n^*}(0)$ και $\frac{N-(n^*+1)}{N} < v_{n^*+1}(0)$, που δίνουν

$$
\sum_{j=0}^{n^*-1}\frac{1}{N-j-1} \leq 1 < \sum_{j=0}^{n^*}\frac{1}{N-j-1}.
$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός κατωφλίου αποδοχής n^*

- Η συνάρτηση $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1}$ είναι αύξουσα ως προς n.
- Το κατώφλι n^* που προσδιορίζει τη βέλτιστη πολιτική είναι το

$$n^* = \max\left\{ n = 1, 2, \ldots, N-1 : \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{N-j-1} \leq 1 \right\}.$$

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός βέλτιστης πιθανότητας επιλογής

- Η πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου υπό τη βέλτιστη πολιτική είναι $v_{n^*+1}(0)$.
- Πράγματι, στο στάδιο $n^* + 1$ το βέλτιστο είναι να απορριφθεί ο τρέχων υποψήφιος, ανεξάρτητα αν είναι ο καλύτερος ως τότε ή όχι και από κει και πέρα να ακολουθηθεί η βέλτιστη πολιτική.
- Άρα: Η μέγιστη πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου στο πρόβλημα του γραμματέως είναι

$$p_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n^*(N)} \frac{N - n^*(N) - 1}{N - j - 1},$$

όπου $n^*(N)$ το βέλτιστο κατώφλι για την επιλογή του καλύτερου υποψηφίου μεταξύ N υποψηφίων.

Το πρόβλημα του γραμματέως - Υπολογισμός βέλτιστης πιθανότητας επιλογής

- Έχουμε

N	2	3	4	5	6	7	8	9
p_N	0.5	0.5	0.4583	0.4333	0.4277	0.4142	0.4098	0.4059

- Ασυμπτωτικά:
  Το μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που πρέπει να απορρίπτεται πριν επιλεγεί ο μέχρι στιγμής καλύτερος σύμφωνα με τη βέλτιστη πολιτική είναι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N - n^*(N)}{N} = \frac{1}{e}.$$

  Η οριακή πιθανότητα επιλογής του βέλτιστου υποψηφίου υπό τη βέλτιστη πολιτική είναι

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \frac{1}{e}.$$