Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα Μέρος 3 Θεωρία Ουρών Αναμονής

Αντώνης Οικονόμου

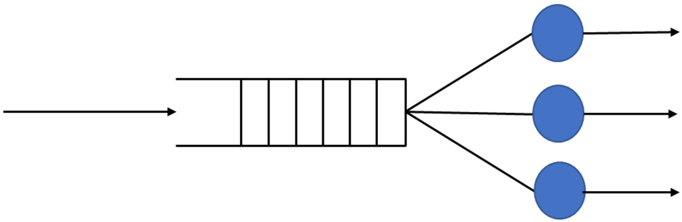
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα

19/10/2022-4/11/2022

Εισαγωγή στη Θεωρία Ουρών Αναμονής

Ουρά αναμονής - Βασική ιδέα

- Ουρά Αναμονής ή Σύστημα εξυπηρέτησης = Στοχαστικό σύστημα εισόδου-εξόδου με διακριτές μονάδες.



Σχήμα: Ουρά αναμονής

Βασικά χαρακτηριστικά - Ονοματολογία Kendall

- Βασικά χαρακτηριστικά:
  1. Διαδικασία αφίξεων (A).
  2. Χρόνοι εξυπηρέτησης (B).
  3. Αριθμός παράλληλων υπηρετών (c).
  4. Χωρητικότητα (k).
  5. Πειθαρχία ουράς ( ).
- Ονοματολογία Kendall:
  A/B/c/k( ).

Βασικά χαρακτηριστικά - τιμές

- Ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων, χρόνοι εξυπηρέτησης: Θεωρούνται γενικά ανεξάρτητοι και ισόνομοι. A,B:
  1. G ή GI (General Independent) Γενική κατανομή.
  2. M (Markovian, Memoryless) Εκθετική κατανομή.
  3. D (Deterministic) Σταθεροί χρόνοι.
  4. E_k (Erlang) Erlang κατανομή.
  5. H_k (Hyperexponential) Υπερεκθετική κατανομή.
- Αριθμός παράλληλων υπηρετών: $c = 1, 2, \ldots$.
- Χωρητικότητα: $k = c, c+1, c+2, \ldots$.
- Πειθαρχία ουράς ( ):
  1. (FCFS) First-Come-First-Served.
  2. (LCFS) Last-Come-First-Served.
  3. (SIRO) Service-In-Random-Order.
  4. (SSTF) Shortest-Service-Time-First.

Βασικές παράμετροι

- Ρυθμός αφίξεων λ ή μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων a. $\lambda = \frac{1}{a}$.
- Ρυθμός εξυπηρέτησης μ ή μέσος χρόνος εξυπηρέτησης b. $\mu = \frac{1}{b}$.
- Αριθμός υπηρετών c.
- Χωρητικότητα k.
- Πειθαρχία.
- Αν γνωρίζω μόνο μέσους χρόνους τότε χρησιμοποιώ για τη μοντελοποίηση την εκθετική κατανομή.
- Από όλες τις μη-αρνητικές τ.μ. με δοσμένη μέση τιμή, η εκθετική έχει την μικρότερη μεροληψία μοντελοποίησης (μέγιστη εντροπία).

Βασικές περιοχές Θεωρίας Ουρών Αναμονής

- Αποτίμηση απόδοσης. (Στοχαστικές Ανελίξεις).
- Σύγκριση συστημάτων. (Στοχαστικές Ανελίξεις + Στοχαστικές Διατάξεις).
- Βέλτιστος σχεδιασμός. (Στοχαστικές Ανελίξεις + Μη-γραμμικός, Ακέραιος Προγραμματισμός).
- Βέλτιστος δυναμικός έλεγχος. (Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός).
- Στρατηγική συμπεριφορά. (Θεωρία Παιγνίων).

Στοχ. διαδικασίες αποτίμησης απόδοσης ουρών

- $Q(t)$: Αριθμός πελατών στο σύστημα τη στιγμή t.
- $Q_q(t)$: Αριθμός πελατών σε αναμονή τη στιγμή t.
- $Q_s(t)$: Αριθμός εξυπηρετούμενων πελατών τη στιγμή t.
- S_n: Χρόνος παραμονής n-οστού πελάτη.
- W_n: Χρόνος αναμονής n-οστού πελάτη.
- B_n: Χρόνος εξυπηρέτησης n-οστού πελάτη.
- I_n: n-οστή περίοδος αργίας.
- Y_n: n-οστή περίοδος συνεχούς λειτουργίας.
- Z_n: n-οστός κύκλος απασχόλησης (από πελάτη που φθάνει σε κενό σύστημα σε επόμενο πελάτη που φθάνει σε κενό σύστημα).

Εμφυτευμένες διαδικασίες

- $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$: Στιγμές διαδοχικών αφίξεων.
- $D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \ldots$: Στιγμές διαδοχικών αναχωρήσεων.
- $Q_n^- = Q(A_n^-)$: Πλήθος πελατών που βρίσκει στο σύστημα η n-οστή άφιξη.
- $Q_n^+ = Q(D_n^+)$: Πλήθος πελατών που αφήνει στο σύστημα η n-οστή αναχώρηση.

Βασικά μέτρα απόδοσης ουρών

- Η διαδικασία $\{Q(t)\}$ είναι αναγεννητική.
- Στιγμές αναγέννησης: Σημεία έναρξης των κύκλων απασχόλησης (αφίξεις πελατών σε κενό σύστημα).
- Έστω Z ο πρώτος κύκλος απασχόλησης και έστω ότι έχει απεριοδική κατανομή.
- Λόγω της αναγεννητικότητας:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du\right]}{t} \text{ με πιθ. } 1$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Pr[\{Q(u)=j]\} du}{t} = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t)=j]$$

$$= \frac{E[\int_0^Z 1_{\{Q(u)=j\}} du]}{E[Z]} \stackrel{\text{ορσ}}{=} p_j = \Pr[Q=j].$$

Βασικά μέτρα απόδοσης ουρών (συνέχεια)

- Για την εμφυτευμένη διαδικασία σε στιγμές αφίξεων έχουμε ανάλογα:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^- = j\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{Q_k^- = j\}}\right] \text{ με πιϑ. } 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Pr[Q_k^- = j] = \lim_{n\to\infty} \Pr[Q_n^- = j]$$

$$= \frac{1}{E[A(Z)]} E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} 1_{\{Q_k^- = j\}}\right] \stackrel{\text{ορσ}}{=} a_j = \Pr[Q^- = j],$$

όπου Z ο πρώτος κύκλος λειτουργίας και $A(Z)$ το πλήθος των αφίξεων σε αυτόν.

Βασικά μέτρα απόδοσης ουρών (συνέχεια)

- Ομοίως ορίζουμε d_j την πιθανότητα j πελατών σε στιγμές αναχωρήσεων.
- Συνοπτικά:
  1. (p_j): Κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο.
  2. (a_j): Κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών στο σύστημα σε στιγμές αφίξεων.
  3. (d_j): Κατανομή ισορροπίας αριθμού πελατών στο σύστημα σε στιγμές αναχωρήσεων.

Βασικά μέτρα απόδοσης ουρών (συνέχεια)

- Για την κατανομή του χρόνου παραμονής πελάτη έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k^- \le x\}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\left[\sum_{k=1}^{n} 1_{\{S_k^- \le x\}}\right] \text{ με πιθ. } 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Pr[S_k^- \le x] = \lim_{n\to\infty} \Pr[S_n^- \le x]$$

$$= \frac{1}{E[A(Z)]} E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} 1_{\{S_k^- \le x\}}\right] \overset{\text{ορσ}}{=} F_S(x) = \Pr[S \le x],$$

όπου Z ο πρώτος κύκλος λειτουργίας και $A(Z)$ το πλήθος των αφίξεων σε αυτόν.

Βασικά μέσα μέτρα απόδοσης ουρών

- Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα:

$$E[Q] \overset{\text{ορσ}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t Q(u)du\right]}{t} \text{ με πιϑ. } 1$$

$$= \lim_{t\to\infty} E[Q(t)] = \frac{E[\int_0^Z Q(u)du]}{E[Z]}.$$

- Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα:

$$E[S] \overset{\text{ορσ}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=1}^n S_k\right]}{n} \text{ με πιϑ. } 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} E[S_n] = \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E[A(Z)]}.$$

4 Βασικά αποτελέσματα

1. Χαρακτηρισμός ευστάθειας σε συστήματα G/G/c.
2. Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων (αφίξεων και αναχωρήσεων).
3. Ιδιότητα PASTA.
4. Νόμος του Little.

Χαρακτηρισμός ευστάθειας σε συστήματα G/G/c

- G/G/c με απεριοδική κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης ή ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων (ή και τα δύο).
- Ρυθμός συνωστισμού = Ρυθμός αφίξεων × Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης:

$$\rho = \lambda \times b.$$

- $\rho < c \Leftrightarrow$ Ευστάθεια:
  $p_n, a_n, d_n > 0$ και $\sum_n p_n = \sum_n a_n = \sum_n d_n = 1$.
- $\rho \geq c \Leftrightarrow$ Αστάθεια:
  $p_n = a_n = d_n = 0$ και $\lim_{t\to\infty} Q(t) = \infty$ με πιθ. 1.

Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων

- Μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις $\Rightarrow (a_n) = (d_n)$.
- Βασικές τυχαίες μεταβλητές για την απόδειξη:
  1. $A(t)$: Πλήθος αφίξεων στο $(0, t]$.
  2. $D(t)$: Πλήθος αναχωρήσεων στο $(0, t]$.
  3. $A_j(t)$: Πλήθος αφίξεων στο $(0, t]$ που βρίσκουν j πελάτες.
  4. $D_j(t)$: Πλήθος αναχωρήσεων στο $(0, t]$ που αφήνουν j πελάτες.
- Είναι

$$
\begin{aligned}
a_j &= \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}, \\
d_j &= \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}.
\end{aligned}
$$

Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων (αιτιολόγηση)

- Από ισότητα ρυθμών αφίξεων και αναχωρήσεων:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}.$$

- Από εναλλαγή άνω και κάτω διασχίσεων του ορίου των j πελατών:

$$|A_j(t) - D_j(t)| \leq 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{t}.$$

- Επομένως:

$$a_j = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_j(t)/t}{A(t)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)/t}{D(t)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)} = d_j.$$

Ιδιότητα PASTA

- Poisson διαδικασία αφίξεων $\Rightarrow (a_n) = (p_n)$.
- Αν $A(t, t+h)$ το πλήθος των αφίξεων στο $(t, t+h]$, τότε:

$$\begin{aligned}
a_j &= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \Pr[Q(t) = j | A(t, t+h) > 0] \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j, A(t, t+h) > 0]}{\Pr[A(t, t+h) > 0]} \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[Q(t) = j] \Pr[A(t, t+h) > 0 | Q(t) = j]}{\Pr[A(t, t+h) > 0]} \\
&= p_j.
\end{aligned}$$

Νόμος του Little

- Μέσος αριθμός πελατών = Ρυθμός αφίξεων × Μέσος χρόνος παραμονής:
$$E[Q] = \lambda E[S].$$

- Θεμελιώδης ισότητα: Σε έναν κύκλο απασχόλησης Z με αριθμό αφίξεων $A(Z)$:
$$\int_0^Z Q(u)du = \sum_{k=1}^{A(Z)} S_k.$$

Νόμος του Little (απόδειξη)

- Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
E[Q] &= \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)du\right]}{E[Z]} = \frac{E[A(Z)]}{E[Z]} \cdot \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)du\right]}{E[A(Z)]} \\
&= \frac{E[A(Z)]}{E[Z]} \cdot \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E[A(Z)]} = \lambda E[S].
\end{aligned}
$$

Ανάλυση Μέσης Τιμής

Άμεσες συνέπειες του Νόμου Little

- Εφαρμογή του N. Little στον χώρο αναμονής: Μέσος αριθμός πελατών σε αναμονή = Ρυθμός αφίξεων × Μέσος χρόνος αναμονής:

$$E[Q_q] = \lambda E[W].$$

- Εφαρμογή του N. Little στον χώρο εξυπηρέτησης: Μέσος αριθμός πελατών σε εξυπηρέτηση = Ρυθμός αφίξεων × Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης:

$$E[Q_s] = \lambda b = \rho.$$

Άμεσες συνέπειες του Νόμου Little (συνέχεια)

- Από την
$$E[Q_s] = \lambda b = \rho,$$
έχουμε:
  1. Μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών σε G/G/c σύστημα: ρ.
  2. Ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος σε G/G/c σύστημα: $\frac{\rho}{c}$.
  3. Πιθανότητα κενού συστήματος σε G/G/1 σύστημα: $p_0 = 1 - \rho$.
- Πράγματι, στην G/G/1 ουρά έχουμε
$$\rho = E[Q_s] = \Pr[Q_s = 1] = \Pr[Q \geq 1] = 1 - p_0.$$

Ερμηνείες του ρυθμού συνωστισμού ρ

- Ο ρυθμός συνωστισμού $\rho = \lambda b$ εκφράζει:
  1. τη μέση ποσότητα εργασίας που εισέρχεται στο σύστημα ανά χρονική μονάδα (μετρημένη σε χρόνο διεκπεραίωσης),
  2. τον αριθμό των απασχολημένων υπηρετών σε συστήματα G/G/c,
  3. το ποσοστό του χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος σε συστήματα G/G/1,
  4. την πιθανότητα μη-κενού συστήματος σε συστήματα G/G/1.

Ανάλυση Μέσης Τιμής - Μεθοδολογία

- Ανάλυση Μέσης Τιμής (AMT) $\rightarrow$ Γρήγορος υπολογισμός των $E[Q]$ και $E[S]$ ενός συστήματος.
- Βασική ιδέα: Επίλυση συστήματος δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.
- 1η εξίσωση: Ο N. Little:

$$E[Q] = \lambda E[S].$$

- 2η εξίσωση: Από τον υπολογισμό του χρόνου παραμονής πελάτη, S, δεσμεύοντας στον αριθμό πελατών που βρίσκει ο πελάτης + PASTA:

$$E[S] = \sum_j \Pr[Q^- = j] E[S|Q^- = j]$$

$$\rightarrow \quad E[S] = f(E[Q^-]) \stackrel{PASTA}{=} f(E[Q]).$$

Ανάλυση Μέσης Τιμής - Επεκτάσεις

- Εφαρμόζοντας τον Ν. Little σε διάφορα υποσυστήματα ενός συστήματος εξυπηρέτησης, μπορούμε να βρούμε όχι μόνο τις μέσες τιμές $E[Q]$, $E[S]$, αλλά και ολόκληρη την κατανομή (p_j).

AMT - M/G/1/1 ουρά

- N. Little:

$$E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow p_1 = \lambda E[S].$$

- Δέσμευση για $E[S]$ στην Q^-:

$$\begin{aligned} E[S] &= \Pr[Q^- = 0]E[S|Q^- = 0] + \Pr[Q^- = 1]E[S|Q^- = 1] \\ &= a_0 \cdot b + a_1 \cdot 0 \overset{PASTA}{=} bp_0. \end{aligned}$$

- Άρα $p_1 = \lambda b p_0 = \rho p_0$. Επίσης $p_0 + p_1 = 1$, οπότε:

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho}, \; p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}, \; E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho}, \; E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}.$$

AMT - M/M/1 ουρά - Μέσες τιμές

- N. Little:

$$E[Q] = \lambda E[S].$$

- Δέσμευση για $E[S]$ στην Q^-:

$$E[S] = E[E[S|Q^-]] = E[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i],$$

όπου B_1 είναι ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που εξυπηρετείται (αν εξυπηρετείται κάποιος), $B_2, B_3, \ldots, B_{Q^-}$ οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών στον χώρο αναμονής (αν υπάρχουν) και B_{Q^-+1} ο χρόνος εξυπηρέτησης του αφικνούμενου πελάτη.

AMT - M/M/1 ουρά - Μέσες τιμές (συνέχεια)

- N. Little:

$$E[Q] = \lambda E[S].$$

- Δέσμευση για $E[S]$ στην Q^- + Αμνήμονη ιδιότητα εκθετικής + PASTA:

$$E[S] = E[Q^- + 1]E[B] = \frac{E[Q^-] + 1}{\mu} = \frac{E[Q] + 1}{\mu}.$$

- Λύνοντας το σύστημα:

$$E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho},\ E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)},$$

όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ είναι ο ρυθμός συνωστισμού.

AMT - M/M/1 ουρά - Κατανομή ισορροπίας

- Εφαρμόζοντας Ν. Little στη θέση j του συστήματος: Μέσο πλήθος πελατών στην θέση j = Ρυθμός αφίξεων στη θέση j × Μέσος χρόνος παραμονής στη θέση j.
- Μέσο πλήθος πελατών στην θέση j =Πιθ. υπάρχει πελάτης στη θέση j $=\sum_{k=j}^{\infty} p_k$.
- Ρυθμός αφίξεων στη θέση j = Ρυθμός αφίξεων × ποσοστό πελατών που περνάνε από τη θέση j $= \lambda \sum_{k=j-1}^{\infty} a_k \stackrel{\text{PASTA}}{=} \lambda \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k$.
- Μέσος χρόνος παραμονής στη θέση $j= \frac{1}{\mu}$.
- Άρα

$$\sum_{k=j}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k.$$

AMT - M/M/1 ουρά - Κατανομή ισορροπίας (συνέχεια)

- Αφαιρούμε την εξίσωση για την κατάσταση $j+1$ από την εξίσωση για την κατάσταση j:

$$\sum_{k=j}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k \quad (\text{εξίσωση για } j)$$

$$- \quad \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j}^{\infty} p_k \quad (\text{εξίσωση για } j+1)$$

- Άρα:

$$p_j = \rho p_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

- Επίσης, για $j = 1$ έχουμε $1 - p_0 = \rho$, οπότε

$$p_j = (1-\rho)\rho^j, \quad j \geq 0.$$

AMT - M/G/1 ουρά - Μέσες τιμές

- N. Little:
$$E[Q] = \lambda E[S].$$

- Δέσμευση για $E[S]$ στην Q^-: $S = \sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i$, αλλά ο B_1 εξαρτάται από το Q^-.
- Οπότε δεσμεύουμε στο κατά πόσον $Q^- = 0$ ή $Q^- > 0$:

$$\begin{aligned} E[S] &= \Pr[Q^- = 0] E\left[B_1 | Q^- = 0\right] \\ &+ \Pr[Q^- > 0] E\left[B_1 | Q^- > 0\right] \\ &+ \Pr[Q^- > 0] E\left[\sum_{i=2}^{Q^-+1} B_i | Q^- > 0\right]. \end{aligned}$$

AMT - M/G/1 ουρά - Μέσες τιμές (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
E[S] &= \Pr[Q^- = 0] E\left[B_1 | Q^- = 0\right] \\
&\quad + \Pr[Q^- > 0] E\left[B_1 | Q^- > 0\right] \\
&\quad + \Pr[Q^- > 0] E\left[\sum_{i=2}^{Q^-+1} B_i | Q^- > 0\right].
\end{aligned}
$$

- $\Pr[Q^- = 0] = 1 - \rho$ (Πόρισμα N. Little - PASTA), $\Pr[Q^- > 0] = \rho$.
- $E\left[B_1 | Q^- = 0\right] = b$.
- $E\left[\sum_{i=2}^{Q^-+1} B_i | Q^- > 0\right] = E[Q^- | Q^- > 0] b$.
- $E\left[B_1 | Q^- > 0\right] = E[R_B] = \frac{E[B^2]}{2E[B]} = \frac{b_2}{2b} = \frac{b^2+\sigma_B^2}{2b}$ (μέσος υπολειπόμενος ανανεωτ. διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης).

AMT - M/G/1 ουρά - Μέσες τιμές (συνέχεια)

- Τελικά:

$$
\begin{aligned}
E[S] &= \Pr[Q^- = 0] E\left[B_1 | Q^- = 0\right] \\
&\quad + \Pr[Q^- > 0] E\left[B_1 | Q^- > 0\right] \\
&\quad + \Pr[Q^- > 0] E\left[\sum_{i=2}^{Q^-+1} B_i | Q^- > 0\right] \\
&= (1-\rho)b + \rho E[R_B] + \Pr[Q^- > 0] E[Q^- | Q^- > 0] b \\
&= (1-\rho)b + \rho E[R_B] + E[Q^- 1_{\{Q^- > 0\}}] b \\
&= (1-\rho)b + \rho E[R_B] + E[Q^-] b \\
&= (1-\rho)b + \rho E[R_B] + E[Q] b.
\end{aligned}
$$

- Άρα:

$$
E[Q] = (1-\rho)\lambda b + \lambda\rho E[R_B] + E[Q]\lambda b.
$$

AMT - M/G/1 ουρά - Μέσες τιμές (συνέχεια)

- Επομένως:

$$E[Q] = \rho + \frac{\rho}{1-\rho}\lambda E[R_B],$$

  και διαιρώντας με λ παίρνουμε και τον μέσο χρόνο παραμονής πελάτη στο σύστημα

$$E[S] = b + \frac{\rho}{1-\rho}E[R_B].$$

- Εύκολος μνημονικός τρόπος:
  Μέσος χρόνος αναμονής στην M/G/1 ουρά = Μέσος αριθμός πελατών στην M/M/1 ουρά × μέση τιμή κατανομής ισορροπίας των χρόνων εξυπηρέτησης:

$$E[W] = \frac{\rho}{1-\rho}E[R_B].$$